Devoir Maison

Le sujet comporte 2 pages.

Partie 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

> **Rappel**
> Le produit scalaire (standard) de deux vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$ est le nombre réel $x_1x_2 + y_1y_2$. Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

1. Soient $u_1 = (2, 4)$ et $u_2 = (-2, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux.
2. Montrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les coordonnées (x', y') de v dans la base (u_1, u_2). En déduire les coordonnées (a, b) du vecteur $v_1 = (2, 6)$ dans la base (u_1, u_2).
4. Sur un dessin, représenter les vecteurs u_1, u_2 et v_1, ainsi que les vecteurs au_1 et bu_2.

5(a) Déterminer l'ensemble A des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées (x', y') dans la base (u_1, u_2) vérifient $x' = 0$.

(b) Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Donner une interprétation géométrique de A.

6. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ et (x', y') ses coordonnées dans la base (u_1, u_2). On appelle *projection orthogonale* de v sur A l'application f qui à v associe le vecteur $x'u_1$.

(a) Interpréter géométriquement l'ensemble $B = \{f(v), v \in \mathbb{R}^2\}$.

(b) Déterminer $A \cap B$.

7. Vérifier que pour tout $v \in B$, $f(v) = v$.
8. En déduire que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $f(f(v)) = f(v)$.

Partie 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

> **Définition**
>
> Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^3$ sont dits supplémentaires si, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(v, w) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = v + w$.
> (En particulier, on a alors $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.)

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}, B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}, C = \mathrm{Vect}\big((0, 0, 1)\big).$$

1. Expliquer pourquoi A, B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2(a) Déterminer $A \cap B$.

(b) Les sous-espaces vectoriels A et B de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

3. Les sous-espaces vectoriels B et C de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
4. Montrer que les sous-espaces A et C de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.

   D'après la question 4, pour $u \in \mathbb{R}^3$ on a un unique couple $(v, w) \in A \times C$ tel que $u = v + w$. Par les formules $g(u) = v$ et $h(u) = w$, on définit $g : \mathbb{R}^3 \to A$ et $h : \mathbb{R}^3 \to C$. L'application g est appelée *projection sur A parallèlement à C* et l'application h est appelée *projection sur C parallèlement à A*.
   Soit $u_1 = (1, 1, 1)$.

5. Calculer $g(u_1)$ et $h(u_1)$.
6. Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $g(u)$ et de $h(u)$ en fonction de x, y et z.
7. Quels sont les éléments $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(u) = 0$?
8. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $h \circ h(u) = h(u)$ et $g \circ g(u) = g(u)$.

> **Rappel/Définition**
>
> - Le produit scalaire (standard) de deux vecteurs (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) de $\mathbb{R}^3$ est le nombre réel $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
> - Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont orthogonaux si,
>   pour tout $(v, w) \in E_1 \times E_2$, v et w sont orthogonaux.

9. Les sous-espaces vectoriels A et C sont-ils orthogonaux ?
10. Les sous-espaces vectoriels B et C sont-ils orthogonaux ?