Université d'Angers **L1 MPCIE** 2016-2017

Algèbre linéaire élémentaire

A. Assi, G. Cousin, B. Landreau, H. Maynadier-Gervais, D. Pol

FEUILLE DE TD N° 1

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

$\boxed{1}$ Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, quels sont ceux qui forment un sous-espace vectoriel ? Justifiez votre réponse. On essaiera de décrire géométriquement ce que sont ces sous-ensembles.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$, b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x^2\}$,

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}$.

$\boxed{2}$ Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, quels sont ceux qui forment un sous-espace vectoriel ? Justifiez votre réponse. On essaiera de décrire géométriquement ce que sont ces sous-ensembles.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + z = 0\}$, b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - y + z = 3\}$,

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (2x + y + z)^2 = 0\}$. d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - z^2 = 0\}$.

$\boxed{3}$ Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $F_a := \{(x, y, a); x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_a est sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $a = 0$.

$\boxed{4}$ Soient a, b, c, d quatre réels. À quelle condition le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé par les (x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$? Interpréter géométriquement cette condition.

$\boxed{5}$ Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Soient F et G deux s.e.v. d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.
Indication : *Pour le sens $F \cup G$ s.e.v. $\Rightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$, raisonner par l'absurde*

$\boxed{7}$ Montrer les propriétés suivantes résultant de la définition d'espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in E$ on a

(i) $\lambda.u = 0$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $u = 0$,
(ii) $\lambda.(u - v) = \lambda.u - \lambda.v$,
(iii) $(\lambda - \mu).u = \lambda.u - \mu.u$.

—- Et pour faire un peu de logique ... (sans rapport direct avec les espaces vectoriels) —-

$\boxed{8}$ Remue-méninges

Anne donne à Manon et à Julie dix dates possibles pour son anniversaire :
15, 16 et 19 mai ; 17 et 18 juin ; 14 et 16 juillet ; 14, 15, 17 août.
Elle donne le jour (un nombre de 14 à 19) à Julie mais pas à Manon, et le mois à Manon mais pas à Julie.
Manon dit à Julie : « Je ne sais pas quelle est la date mais je sais que tu ne le sais pas non plus ».
Julie répond à Manon : « Je ne savais pas quelle était la date mais maintenant je le sais ».
Manon conclut : « Alors, je sais aussi quelle est la date ».
Quelle est la date de l'anniversaire d'Anne ?