Université d'Angers L1 MPCIE 2016-2017

Algèbre linéaire élémentaire
FEUILLE DE TD N° 2

A. Assi, M. Cafasso, G. Cousin, H. Maynadier-Gervais, B. Landreau, D. Pol

Familles génératrices, liées, libres, bases, dimension, rang d'une famille

$\boxed{1}$ Soit $u = (2, 1)$ et $v = (-1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $w = u + 2v$.

a) Les vecteurs u et v sont-ils colinéaires ?
b) Représenter u, v, w, $\mathrm{Vect}\{u\}$, $\mathrm{Vect}\{v\}$, $\mathrm{Vect}\{w\}$ sur un dessin.
c) Comparer $\mathrm{Vect}\{u\}$ et $\mathrm{Vect}\{v, w\}$.

$\boxed{2}$ Pour les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, dire si elles sont liées, libres, génératrices, et si elles forment une base de $\mathbb{R}^2$.

a) $\{v_1\}$ avec $v_1 = (4, 3)$;

b) $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -2)$;

c) $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-3, 3)$;

d) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-7, -14)$, $v_3 = (0, 1)$;

$\boxed{3}$ Pour les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont liées, libres, génératrices, et si elles forment une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$;

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 2, 1)$;

c) $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$;

d) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ avec $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (2, 3, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$.

$\boxed{4}$ Soit $\{u, v, w\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = u + v, u_2 = v + w, u_3 = w + u$.
Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est encore libre.

$\boxed{5}$ Soit P le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 2, 1)$ et $v_3 = 2013.v_1 + 3,14.v_2$.

1. Vérifier que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et en déduire la dimension de P.

2. Montrer que P est aussi engendré par les vecteurs $v'_1 = (1, 1, 1)$ et $v'_2 = (0, 1, 2)$.

3. Montrer que $B = (v_1, v_2)$ et $B' = (v'_1, v'_2)$ sont des bases de P.

4. Soit v dans P, de coordonnées (x_1, x_2) dans B et (x'_1, x'_2) dans B'. Calculer celles-ci en fonction de celles-là et vice-versa.

$\boxed{6}$ Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u = (-2, 3, 7)$, $v = (1, -2, -3)$ et $w = (-1, -1, 6)$.

Trouver une relation de dépendance linéaire entre u, v, w. En déduire que
$\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathrm{Vect}\{v, w\} = \mathrm{Vect}\{w, u\}$.

$\boxed{7}$ Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ on prend le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ et les droites $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 5x\}$, $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

a) Donner un vecteur directeur (donc une base) de chaque droite et une base du plan P.

b) Montrer que $D_1 \cap P = \{0\}$ et que $D_2 \cap P = \{0\}$.

$\boxed{8}$ Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (3,1)$, $u_2 = (-1,5)$.

Le vecteur $e_1 = (1,0)$ appartient-il à $\text{Vect}\{u_1, u_2\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

$\boxed{9}$ a) Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (-1,1,-3)$, $u_2 = (1,2,5)$ et $u_3 = (1,7,1)$.

Le vecteur $e_1 = (1,0,0)$ appartient-il à $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

b) Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (3,2,1)$, $u_3 = (3,3,3)$ et $u_4 = (7,0,7)$.

$\boxed{10}$ Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \{(a+b, 0, a-b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, 2a+b-c, 0, 2a+b+c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Calculer des bases de F, G et $F \cap G$.

Construire des bases de $\mathbb{R}^4$ en complétant une base de F par une base de G, puis en complétant une base de F par des vecteurs extraits de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{11}$ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,2,1), v_2 = (1,-1,0,1), v_3 = (0,0,-1,1)$, $v_4 = (1,2,2,0)$.

Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, puis calculer les coordonnées de $v = (1,1,1,1)$ dans cette base.

$\boxed{12}$ Base et dimension des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$, engendrés par

1. $u_1 = (2,1,3,1)$, $u_2 = (1,2,0,1)$ et $u_3 = (-1,1,-3,0)$;
2. $v_1 = (2,1,-3,1)$, $v_2 = (-1,1,-3,1)$, $v_3 = (4,5,3,1)$ et $v_4 = (1,5,-3,1)$;
3. $w_1 = (0,1,-2,1)$, $w_2 = (4,1,3,0)$, $w_3 = (-2,1,-1,1)$ et $w_4 = (0,3,1,2)$.

$\boxed{13}$ Déterminer une base et la dimension du s.e.v. V de $\mathbb{R}^3$ formé des (x,y,z) tels que

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z & = 0 \\ x + 4y + 11z & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{14}$ [Le nombre de Mathilde]
Mathilde dit à Mathias "J'ai un nombre à 3 chiffres. Si je lui ajoute 3, la somme des chiffres du résultat est 3 fois plus petite que celle du nombre de départ."
Quel était le nombre de Mathilde ?