Université d'Angers **L1 MPCIE** 2016-2017

Algèbre linéaire élémentaire

FEUILLE DE TD N° 3

A. Assi, M. Cafasso, G. Cousin, H. Maynadier-Gervais, B. Landreau, D. Pol

Equations de sous-espaces vectoriels (chapitre 4)

$\boxed{1}$ Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 0 \\ 3x+y-z &= 0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ On considère le système S suivant dont les inconnues sont x, y, z et les paramètres a, b, c:

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ 3x+5y+2z &= b \\ x-y+3z &= c \end{cases}$$

On introduit les vecteurs $u = (1, 3, 1)$, $v = (1, 5, -1)$, $w = (1, 2, 3)$.
a) Résoudre le système S pour $a = b = c = 0$.
b) Que peut-on dire sur la famille formée par les vecteurs u, v, w ?
c) En déduire sans calcul que le système S a une solution unique pour $a = 1, b = -1, c = 0$.
Comment peut-on interpréter x, y, z pour a, b, c donnés ?

$\boxed{3}$ Soit F l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \\ 2x+y+2z+t &= 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une base de F. Quelle est sa dimension?

On considère maintenant les vecteurs $u_1 = (2, 1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, -1, -1)$.
Soit $G = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Quel est le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$?

c) Quelle est la dimension de G ?

d) Trouver un système d'équations linéaires (S) décrivant G.

e) Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

$\boxed{4}$ Déterminer, en résolvant un système linéaire, si le vecteur $v = (3, 9, -4, -2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -2, 0, 3)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$.

$\boxed{5}$ Considérons les trois vecteurs $v_1 = (0, -3, -4, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1)$, $v_3 = (2, 3, 4, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.
Le but de cet exercice est de donner des équations du sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
a) Ces trois vecteurs forment-ils une famille libre ?
b) Montrer que les deux vecteurs v_1, v_2 forment une base de V.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ pour que $u \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

$\boxed{6}$ a) Calculer le rang de la famille de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (2, 3, 4, 5)$, $v_2(2, 4, 6, 8)$, $v_3 = (0, 1, 2, 3)$.

b) Donner des équations du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

$\boxed{7}$ a) Montrer que la famille $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, 2, 2)$, $w = (0, 3, 4)$ n'est pas une famille génératrice de l'espace $\mathbb{R}^3$.

b) Trouver à quelle condition sur x, y et z, le vecteur $h = (x, y, z)$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par u, v, w.

$\boxed{8}$ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère F le sous-espace engendré par u_1, u_2 et u_3 et G le sous-espace engendré par v_1 et v_2 où $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 2, 2, 6)$, $u_3 = (0, 2, 4, 4)$, $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ et $v_2 = (2, 3, 0, 1)$.

a) Déterminer les dimensions de F et G et des systèmes d'équations linéaires indépendantes définissant F et G, en les coordonnées (x, y, z, t) par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer un système d'équations linéaires indépendantes définissant $F \cap G$.

c) En déduire une base de $F \cap G$.

$\boxed{9}$ Le mur

Trois ouvriers maçons construisent un mur en huit jours.
Combien aurait-il fallu d'ouvriers pour construire ce mur en 6 jours ?
