Université d'Angers **L1 MPCIE** 2016-2017

Algèbre linéaire élémentaire

FEUILLE DE TD N° 4

M. Cafasso, G. Cousin, H. Maynadier-Gervais, B. Landreau, D. Pol

Applications linéaires (chapitre 5)

1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Lorsqu'elles le sont, déterminer leurs noyau et image.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, x + y - \sqrt{x^2})$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, xy)$
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, y + z, sinz)$
6. $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_z(x, y) = (x, y + x, a)$ (a est un paramètre)

2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2 + 2x_3$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f : en donner une ou des équations et en déterminer une base.
3. Calculer les dimensions du noyau et de l'image de f.
4. Le sous-ensemble $f^{-1}(\{1\})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Comment peut-on le décrire ?

3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Montrer que f est linéaire, déterminer son noyau et son image. Cette application s'appelle une projection ...

4 Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $g(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$.
Montrer que f est linéaire, déterminer son noyau et son image.

5 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + t, x + 3y + 4z, 2x + 5y + 7z + t).$$

1. Pourquoi f est-elle linéaire ?
2. Donner un système d'équations de $\ker f$.

3. Trouver une base de $\ker f$.

4. Quel est le rang de f ?

5. Compléter la base précédente de $\ker f$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

6. L'application f est-elle injective ? surjective ?

7. Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$, et en extraire une base de $\mathrm{Im} f$.

8. Donner un système d'équations de $\mathrm{Im} f$, c'est-à-dire un système linéaire d'inconnues (x', y', z') ayant $\mathrm{Im} f$ pour espace de solutions.

$\boxed{6}$ Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$f(e_1) = (3,1,0,0,0), \quad f(e_2) = (0,2,0,1,0), \quad f(e_3) = (1,1,1,1,1), \quad f(e_4) = (0,0,3,1,2)$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Donner l'expression de $f(x_1, \dots, x_4)$.

2. Calculer le rang de f.

3. Calculer la dimension du noyau de f et en donner des équations.

$\boxed{7}$ Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$; $f(e_2) = e_1 + e_2 + 2e_3$; $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

2. Calculer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

$\boxed{8}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z) = (y - z, z + x - 2y, -y + x, x - z)$.

1. Calculer le rang de la famille des images des vecteurs de la base canonique.

2. Déterminer le noyau de f ; cette application est-elle injective ?

$\boxed{9}$ Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$.

1. Donner une base de F.

2. Trouver deux applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^5$ ayant F pour noyau.

3. Existe-t-il une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ ayant F pour noyau ?

$\boxed{10}$ Déterminer les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont le noyau est le sous-espace engendré par $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$.