UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2016-2017
L1 SVG
Outils mathématiques pour la biologie

Devoir Maison 2, corrigé rapide

EXERCICE I

Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes.

D'après le cours (variation de la constante), les solutions d'une Ã©quation $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = e^{-A(x)}(K + \int e^{A(x)}b(x)),$$

avec $K \in \mathbb{R}$ une constante et A un primitive de a.

1. $y'(x) + 2y(x) = 4$,
   $a(x) = 2, b(x) = 4; A(x) = 2x$,

   $$y(x) = e^{-2x}(K + \int 4e^{2x}) = e^{-2x}(K + 2e^{2x}) = Ke^{-2x} + 2,$$

   avec $K \in \mathbb{R}$ une constante.

2. $y'(x) + 3xy(x) = 2$,
   $a(x) = 3x, b(x) = 0; A(x) = \frac{3}{2}x^2$,

   $$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}(K + \int 0) = Ke^{-\frac{3}{2}x^2},$$

   avec $K \in \mathbb{R}$ une constante.

3. $y'(x) + 5y(x) = x$, *pour cette question, on pourra utiliser une intégration par parties.*
   $a(x) = 5, b(x) = x; A(x) = 5x$,

   $$y(x) = e^{-5x}(K + \int xe^{5x})$$

   Par intégration par partie, avec $u'(x) = e^{5x}, v(x) = x; u(x) = \frac{1}{5}e^{5x}, v'(x) = 1$, on obtient

   $$\int xe^{5x} = \frac{1}{5}xe^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} = e^{5x}(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25})$$

   Finalement, la solution générale est

   $$y(x) = e^{-5x}\left(K + e^{5x}(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25})\right) = Ke^{-5x} + \frac{1}{5}x - \frac{1}{25},$$

   pour $K \in \mathbb{R}$.

EXERCICE II

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante.

$$y''(x) - y(x) = 5cos(2x) \tag{1}$$

1. *Donner l'équation homogène associée, puis décrire l'ensemble de ses solutions.* L'équation homogène associée est
$$y''(x) - y(x) = 0.$$
L'équation caractéristique est $x^2 - 1 = 0$, ce qui revient à $(x-1)(x+1) = 0$. On a donc deux solutions réelles pour cette dernière : $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. d'après le cours les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = c_1e^x + c_2e^{-x},$$
où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2. *Donner une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que la fonction y_p définie par $y_p(x) = kcos(2x)$ soit solution de l'équation* (1).

   La fonction y_p est solution de (1) si et seulement si $y_p''(x) - y_p(x) = 5cos(2x)$, c'est à dire $-4kcos(2x) - kcos(2x) = 5cos(2x)$, ou encore $-5kcos(2x) = 5cos(2x)$. Cette condition est satisfaite pour $k = -1$.

3. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

   D'après le cours, les solutions de (1) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme de y_p et d'une solution du système homogène. Ce sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto -cos(2x) + c_1e^x + c_2e^{-x},$$
où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles quelconques.

EXERCICE III

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante.

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \tag{2}$$

1. *Donner l'équation homogène associée, puis décrire l'ensemble de ses solutions.* L'équation homogène associée est
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$
L'équation caractéristique est $x^2-2x+1 = 0$, ce qui revient à $(x-1)^2 = 0$. On a donc une seule solution réelle ("double") pour cette dernière: $r = 1$. D'après le cours les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = c_1e^x + c_2xe^x,$$
où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2. *Donner une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que la fonction y_p définie par $y_p(x) = kx^2e^x$ soit solution de l'équation* (2)*.*

   La fonction y_p est solution de (2) si et seulement si $y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = e^x$, c'est à dire
   $$k(2e^x + 4xe^x + x^2e^x) - 2k(2xe^x + x^2e^x) + kx^2e^x = e^x$$
   , En simplifiant par e^x et en réduisant, on voit que cela revient à $2k = 1$ c'est à dire $k = \frac{1}{2}$.

3. *Décrire l'ensemble des solutions de l'équation* (2)*.*

   D'après le cours, les solutions de (2) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme de y_p et d'une solution du système homogène. Ce sont donc les fonctions de la forme
   $$x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x + c_1e^x + c_2xe^x,$$
   où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles quelconques.