1. Contexte

X variété complexe lisse, pas nécessairement compacte.
M Kähler compacte, plongée dans X comme hypersurface.
$\mathcal{O}_X$ les fonctions *holomorphes* sur X.

1.1. fibré normal, fibré conormal. — Le fibré normal $N = N_{X/M}$ de M dans X est un fibré vectoriel au dessus de M, définit par la suite exacte *de fibrés vectoriels* suivante.

$$0 \to TM \to TX_{|M} \to N_{X/M} \to 0$$

Son dual est identifié grâce à la suite duale

$$0 \to N^* \to (TX_{|M})^* \to TM^* \to 0.$$

C'est le sous-fibré de $(TX_{|M})^*$ donné par les formes linéaires qui s'annulent sur TM.

Considérons le faisceau d'idéaux $I \subset \mathcal{O}_X$ associé à M ($I = \mathcal{O}_X(-M)$). Pour un faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$, on notera $V(\mathcal{F}) \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ le fibré vectoriel associé. Comme M de codimension 1, on peut considérer $V(I)$ et $V(I^2)$. Pour un fibré V on note $\mathcal{O}(V)$ le faisceau de ses sections. On a $\mathcal{O}(V(\mathcal{F})) \simeq \mathcal{F}$.

On a une suite exacte *de faisceaux*

$$0 \to I^2_{|M} \to I_{|M} \to \mathcal{O}(TX^*_{|M}) \to \mathcal{O}(TM^*) \to 0$$

définie par

$$I_{|M,p} \ni g \mapsto \alpha_g \in \mathcal{O}(TX^*_{|M}), \alpha_g : \partial \mapsto (p \mapsto \partial_p g)$$

Démonstration. — x équation locale de M, complétér avec des coordonnées (y_i) sur M

- exacte en $\mathcal{O}(TX^*_{|M})$: $g_{|M} = 0$ donc pour tout p dans M, $(\partial/\partial y_i)_p g = 0$
- exacte en $I_{|M}$: α_g est nulle ssi en tout $p \in M$ $(\partial/\partial x)_p g = 0$, pour $g = \sum_{i=1} a_i(y)x^i$, cela signifie $a_2 = 0$, x^2 divise g.

□

Ainsi on a prouvé un

Isomorphisme 1.1.1. — $(I/I^2)_{|M} \simeq \mathcal{O}(N^*)$.

1.2. Théorème topologique du voisinage tubulaire. — Dans le monde de la géométrie différentielle on remplace les fonctions holomorphes par des fonctions lisses. Par Whitney (partitions de l'unité) on plonge X dans $\mathbb{R}^N$, on a donc une métrique riemannienne sur X, et on construit une section de

$$0 \to TM \to TX_{|M} \to N_{X/M} \to 0$$

à l'aide d'un supplémentaire orthogonal (Gram-Schmidt). Ensuite on prouve ce qui suit.

Théorème 1.2.1. — *(Voisinage tubulaire) On a (même pour M non compacte)*

- *un voisinage V de la section triviale M_0 de N*
- *un voisinage U de M dans X*
- *un homéo de paires $(V, M_0) \simeq (U, M)$.*

Quitte à remplacer le voisinage V par un sous fibré en disques, M_0 est rétracte par déformation de V. Dans ce cas, $\pi_1(M) \to \pi_1(U)$ est un isomorphisme.

éléments de preuve. —

1. On le fait pour M' de codim quelconque dans $X' = \mathbb{R}^N$ $TM'^{\perp} \to \mathbb{R}^N, v_x \mapsto x + v_x$ est un difféo local en tout point de M'.
2. On l'applique à $M' = X$ plongé dans $\mathbb{R}^N$. Cela donne une rétraction $r : U \to X$ d'un voisinage de X sur X.
3. On regarde $NH \to U, v_x \mapsto x + v_x$ composé avec $r : U \to X$ qui est un difféo local.

□

1.3. Théorèmes analytiques du voisinage tubulaire (Grauert), pour $C \cdot C < 0$, voisinage fortement pseudo-convexe. — Pour courbe rationnelle d'autointersection négative strictement on a un théorème de voisinage tubulaire holomorphe (désingularisation minimale de certains quotients cycliques de $(\mathbb{C}^2, 0)$)

1.4. pour $C \cdot C > 0$, on a un système de voisinages fortement pseudo-concaves (Suzuki). —

1.5. Cas qui nous occupe : $C \cdot C = 0$ et ses généralisations. — On s'intéresse à la situation intermédiaire $C \cdot C = 0$ et à ses généralisations, pour C remplacé par M une hypersurface de dimension quelconque. $C \cdot C = 0$ se généralise en $c_1(N)$ torsion, où N est le fibré normal de M.

Exemple 1.5.1. — Si M est la section triviale d'un fibré end droite $\pi : L = X \to M'$, le fibré normal de M est $\pi^* L$. Donc chaque fibré en droite est un fibré normal. Pour que sa classe de Chern soit de torsion, il suffit de construire L comme un fibré unitaire plat avec monodromie de torsion. Il est possible de produire un tel fibré à classe de Chern non triviale dès que $H_1(M, \mathbb{Z})$ possède un élément de torsion. Par exemple avec une surface d'Enriques ($\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Quelques détails ci-dessous.

1.5.1. Représentations et systèmes locaux. — Pour une représentation $\rho : \pi_1(Y) \to \mathbb{C}^*$. À partir de ρ, on construit un fibré en droite au dessus de Y muni d'un feuilletage holomorphe de dimension $dimX$ et *transverse aux fibres*. On procède ainsi : soit $\tilde{Y}$ le revêtement universel de Y, on quotiente $\tilde{Y} \times \mathbb{C}$ muni du feuilletage horizontal par $\pi_1(Y)$: $(y, v) \equiv (Deck(\gamma) \cdot y, \rho(\gamma) \cdot v)$. On peut relever les lacets de Y dans les feuilles du feuilletage quotient, la monodromie est ρ. On peut donner un système de trivialisations où les feuilles deviennent horizontale, dans ce cas le cocycle donnant les transitions est localement constant, un élément de $H^1(Y, \mathbb{C}^*)$. Si ρ à valeurs dans $U(1) = \mathbb{S}^1$, d'après la construction, on peut même récupérer un élément de $H^1(Y, \mathbb{S}^1)$.

Cette procédure donne une bijection entre les représentations de rang 1 et les systèmes locaux de rang 1.

2. Motivations, développements envisagés

2.1. Questions pour $c_1(N^*)$ torsion (e.g. $C \cdot C = 0$). — Cas fibré normal de M trivial, quand a-t-on une fibration de fibre M ?

On va définir une classe appelée *classe de Ueda*, notée $u(M \to X)$. On aura aussi le *type de Ueda* noté $utype(M \to X)$ [Résultat 4 ?]

***Théorème 2.1.1* (Neeman).** — *Soit X lisse compacte Kähler. Soit M hypersurface lisse de X, avec normal N. Si $c_1(N)$ est torsion d'ordre k et $utype(M \to X) > k$ alors kM est une fibre d'une fibration $X \to C$ et $utype(M \to X) = \infty$.*

ref : [**3**] theorem 5.1 p 109, article 2.

2.2. Question de Hartshorne, Constructions de surfaces algébriques Stein non affine. — Dans ce contexte, avec X une surface projective, Hartshorne se demande -*Que dire de la structure analytique de* $(X \setminus M)$ *?* Dans ce sens, on a des exemples de $X \setminus M$ Stein, non affine.

***Définition 2.2.1* (de tricheur).** — Un espace analytique complexe est Stein si il admet un plongement propre dans $\mathbb{C}^n$, pour n assez grand.

Ueda a montré ce qui suit, [Résultat 1 ?].

***Théorème 2.2.2* (Ueda, [4]).** — *Supposons $M = C$ est une courbe, X surface projective et $u(C \to X) \neq 0$, alors $X^0 = X \setminus C$ est holomorphiquement convexe. En particulier, après des contractions $X^0 \to Y^0$, Y^0 est Stein.*

2.2.1. Généralisation d'un exemple de Serre. — [Résultat 2 ?] cf article 1 de Neeman, section 7. Il s'agit d'exemples de surfaces algébrique Stein non affine, chacun obtenu à partir du complémentaire d'une section C dans un $\mathbb{P}^1$-fibré d'espaces total X (projectif), avec $u(C \to X) \neq 0$.

Pour le cas où la courbe C est elliptique on a une classification complète par Neeman (section 6, article 1) [Résultat 2bis ?].

2.2.2. Un autre exemple, du à Neeman. — Exemple sans rétraction $X \to C$. [Résultat 3 ?] méthode implicite, par déformation du plongement $C \to X$. On regarde la "dérivée" de la classe de Ueda.

***Théorème 2.2.3* (Neeman, Prop.** 10.5 **p** 89**).** — *Soit C une courbe de genre 2 et $Y = H^0(C, KC)^*/\Lambda$ sa variété jacobienne ($\Lambda = \langle \omega \mapsto \int_{\alpha_i} \omega \rangle$). On considère $C \to Y$ l'application d'Abel. Soit p_1, p_2 deux points de C reliés par l'involution hyperelliptique. En éclatant ces deux points ($X \to Y$) on obtient un plongement $C \to X$ avec $u_1(C) \neq 0$.*

ref : section 10 article 1

2.3. Applications aux feuilletages. — Généralisation feuilletée du Théorème 2.3.1. [Résultat 5 ?]. La nouveauté concerne le cas d'égalité $utype(M) = k$.

***Théorème 2.3.1* (Claudon-Loray-Pereira-Touzet).** — *Soit X lisse compacte Kähler. Soit M hypersurface lisse de X, avec normal N. Si il existe un fibré plat L sur X avec $L_{|M} = N^k$ et $utype(M \to X) \geq k$ alors M est une feuille (sans singularités) d'un feuilletage holomorphe (transversalement affine) de codimension 1 sur X.*

c'est le théorème B de leur article [**1**], prolongement possible par l'étude complète de leur papier.

2.4. Codimension supérieure, Koike. — [**2**]

3. Définition de la classe de Ueda

3.1. Connexion unitaire plate. — Quitte à réduire le voisinage X, il se rétracte sur M, on va faire cette hypothèse aujourd'hui.

Lemme 3.1.1. — *Soit $L \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ un fibré en droites avec $c_1(L) \in H^)$ de torsion, il existe un unique fibré unitaire plat $\xi \in H^1(M, \mathbb{S}^1)$ dont l'image dans $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ est L*

Démonstration. — On a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{R} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_1"] & \mathbb{S}^1 \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathcal{O}_M \arrow[r, "j"] & \mathcal{O}_M^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui induit le suivant.

$$\begin{tikzcd}
H^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(M,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H^1(M,\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\tilde{c}_1"] \arrow[d, "i_*"] & H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(M,\mathbb{R}) \arrow[d] \\
H^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^1(M,\mathcal{O}_M) \arrow[r] & H^1(M,\mathcal{O}_M^*) \arrow[r, "c_1"] & H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(M,\mathcal{O}_M)
\end{tikzcd}$$

On a aussi une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{O} \overset{\Im}{\to} PH_{\mathbb{R}} \to 0$ qui induit

$$0 \to H^0(M, \mathbb{R}) \to H^0(M, \mathcal{O}) \to H^0(M, PH_{\mathbb{R}}) \to H^1(M, \mathbb{R}) \to H^1(M, \mathcal{O})$$

Les fonctions pluriharmoniques satisfont le principe du maximum donc, par compacité $H^0(M, PH_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$; de même, $\dim H^0(M, \mathbb{R}) = 1/2 \dim H^0(M, \mathcal{O})$, on peut donc raccourcir la suite en

$$0 \to H^1(M, \mathbb{R}) \to H^1(M, \mathcal{O}).$$

Par théorie de Hodge (Kählerianité) $\dim H^1(M, \mathbb{R}) = \dim H^1(M, \mathcal{O})$, donc $H^1(M, \mathbb{R}) \to H^1(M, \mathcal{O})$ est un isomorphisme. On fait du diagram chasing. Soit $L \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$, comme $c_1(L)$ torsion, $c_1(L) = \tilde{c}_1(\xi)$. Donc $c_1(L - i_*\xi) = 0$ et $L - i_*\xi = j_*\eta$. Comme $H^0(M, \mathbb{R}) \to H^0(M, \mathcal{O})$ est surjective, $L - i_*\xi = j_*i_*\tau = i_*j_*\tau$. Ainsi $L = i_*(\xi + j_*\tau)$.

Unicité : si $i_*\xi = 0$, pour $\xi \in H^1(M, \mathbb{S}^1)$, alors $\tilde{c}_1(\xi) = 0$. alors $\xi = j_*\tau$ et $i_*\tau \in Ker(H^1(M, \mathcal{O}_M) \to H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$. Donc $i_*\tau = j_*\alpha = j_*i_*\alpha = i_*j_*\alpha$, comme $H^0(M, \mathbb{R}) \to H^0(M, \mathcal{O})$ est injective, on en tire $\tau = j_*\alpha$, $\xi = j_*^2\alpha = 0$. □

Si $c_1(N)$ torsion, comme $\pi_1(X) = \pi_1(M)$, l'unique connexion unitaire plate sur N s'étend à un fibré en droite au dessus de X.

Soit $\tilde{N}$ le fibré plat ainsi étendu.

3.2. Deux isomorphismes. —

Isomorphisme 3.2.1. — pour $n \geq 0$, $(\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1})_{|M} \simeq (I^n/I^{n+1})_{|M}$

Démonstration. — Le cas $n = 0$: $(\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I)_{|M} \simeq (\mathcal{O}_X/I)_{|M}$ vient du fait que $\mathcal{M}_{|M}$ est trivial. Pour $n \geq 1$, on utilise $\mathcal{O}_X/I \otimes I^n/I^{n+1} \simeq I^n/I^{n+1}$. □

Isomorphisme 3.2.2. — $N^{-1} \simeq V(I)_{|M}$

Démonstration. — Soient (f_i) des équations locales de M, recouvrement (U_i). et g_{ij} les transitions, $f_i = g_{ij} f_j$. $V(I)$ est donné par le cocycle (g_{ij}^{-1}). Une section de $V(I)$ au dessus de U est donnée par des fonctions holomorphes s_i sur $U \cap U_i$. Quitte à raffiner le recouvrement, les U_i sont les traces sur M d'ouverts $\tilde{U}_i$ de X et les s_i sont des restrictions de fonctions holomorphes $\tilde{s}_i$ sur $\tilde{U}_i$. Sur $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$, $\tilde{s}_i - \tilde{s}_j \in I$. On définit $\mathcal{O}(V(I)) \to (I/I^2)_{|M}$ par $s_i \mapsto [\tilde{s}_i f_i]$. □

3.3. Idée de la définition. — Ainsi le fibré en droite $\mathcal{M} := V(I) \otimes \tilde{N}$ est trivial au dessus de M. On va étudier à quel ordre son faisceau de sections peut se trivialiser le long de M.

On a une suite exacte *de faisceaux*

$$0 \to I^n/I^{n+1} \to \mathcal{O}_X/I^{n+1} \to \mathcal{O}_X/I^n \to 0.$$

Tensoriser par le faisceaux inversible $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ la laisse exacte, restreindre à M aussi

$$0 \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1})_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1})_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)_{|M} \to 0.$$

On en tire une suite exacte de cohomologie

$$H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1}) \to H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n) \xrightarrow{\partial} H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1}).$$

Supposons qu'on a un isomorphisme $\Psi : (\mathcal{O}_X/I^n)_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)_{|M}$ (une trivialisation à l'ordre n de $\mathcal{M}$ le long de M). Soit $[s]$ l'image de $[1] \in H^0(M, \mathcal{O}_X/I^n)$ par ψ ; alors $s \in H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)$. s est représentée localement par des sections s_i de $\mathcal{O}(\mathcal{M})$. Ces sections s_i ne peuvent s'annuler en aucun point de M, car Ψ est un isomorphisme. Réciproquement, une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)$ qui satisfait cette condition définit un isomorphisme Ψ.

La classe ∂s représente l'obstruction à relever s en une section

$$\tilde{s} \in H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1})$$

définissant une trivialisation à l'ordre $n + 1$. La condition de non annulation sur M pour les $\tilde{s}_i$ est automatique.

Définition 3.3.1. — La pro-n-ième classe de Ueda du plongement $M \to X$ est définie comme $\partial s \in H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1})$ si il existe une telle section s. Sinon, on dit que la n-ième classe de Ueda n'est pas définie.

L'image de s par la projection $\alpha : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I$ définit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/I \to \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I, [1] \mapsto \alpha(s)$ puis en tensorisant par l'identité de I^n/I^{n+1}, $\overline{\alpha s} : (I^n/I^{n+1})_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1})_{|M}$.

Définition 3.3.2. — La n-ième classe de Ueda du plongement $M \to X$ est définie comme $(\overline{\alpha s}^{\ -1})_* \partial s \in H^1(M, I^n/I^{n+1})$ si il existe une telle section s. Sinon, on dit que la n-ième classe de Ueda n'est pas définie. Notation : u_n.

On va montrer que dans, le cas où s existe, $(\overline{\alpha s}^{\ -1})_* \partial s \in H^1(M, I^n/I^{n+1})$ ne dépend pas du choix de s.

3.4. La définition est bien posée. —

Remarque 3.4.1. — $(I^n/I^{n+1})_{|M} = \mathcal{O}(N)^{-n}$. Par récurrence, en utilisant $\mathcal{O}(N^{-1}) = (I/I^2)_{|M}$ et $I/I^2 \otimes I^n/I^{n+1} \simeq I^{n+1}/I^{n+2}$.

Lemme 3.4.2. — *Soit $\alpha : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I$ la projection. Si $s_1, s_2 \in H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)$ satisfont $\alpha(s_1 - s_2)$=0, alors $\partial(s_1 - s_2) = 0$.*

Démonstration. — Par hypothèse, $s_1 - s_2 \in H^0(M, I/I^n)$. Il suffit donc de montrer $\partial H^0(M, I/I^n) = 0$. On a un morphisme de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I/I^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I/I^n \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1} \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1} \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en tire un autre morphisme de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I/I^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I/I^n) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1}) \arrow[d, equal] \\
H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1}) \arrow[r] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n) \arrow[r, "\partial"] & H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^n/I^{n+1})
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que $H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n}) \to H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+\ell})$ est surjectif. On va montrer plus fort dans le sous-lemme suivant. □

Sous-lemme 3.4.3. — *Soient $n \geq \ell \geq 1$ et $k \geq 0$, trois entiers. Le morphisme $H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n}) \to H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+\ell})$ est surjectif.*

preuve du sous-lemme. — Récurrence sur ℓ.
Cas $\ell = 1$: Si le fibré en droite topologiquement torsion $V((\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+1})_{|M}) \simeq N^{-k}$ possède une section non nulle s, alors ce fibré est trivial. Donc soit $H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+1}) = 0$ et il n'y a rien à prouver, soit $N^{-k} = (I^k/I^{k+1})_{|M} \simeq \mathcal{O}_M$, voir Lemme 3.4.4.

Si $(I^k/I^{k+1})_{|M} \simeq \mathcal{O}_M$, pour la section s induisant un iso

$$(\mathcal{O}_X/I^n)_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X/I^n)_{|M},$$

comme $\mathcal{O}_X/I^n \otimes \mathcal{O}_X/I^n = \mathcal{O}_X/I^n$, la section s^{k+1} induit un iso

$$(\mathcal{O}_X/I^n)_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M})^{k+1} \otimes \mathcal{O}_X/I^n)_{|M} = (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}(\tilde{N}^{-k}) \otimes I^k \otimes \mathcal{O}_X/I^n)_{|M}$$

Mais, par hypothèse, $\mathcal{O}(\tilde{N}^{-k})_{|M} = (\mathcal{O}_X)_{|M}$. On a donc un isomorphisme, induit par une l'image de s^{k+1} dans $H^0(M, (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n})_{|M})$,

$$(\mathcal{O}_X/I^n)_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n})_{|M}$$

Pour que ce soit un isomorphisme, sa composée avec la projection

$$(\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n})_{|M} \to (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+1})_{|M}$$

ne peut être nulle, c'est à dire la composée correspond à une section non-nulle de $H^0(M, (\mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+1})_{|M}) = \mathbb{C}$. On a donc la surjectivité pour $\ell = 1$ et tout $k \geq 0$. Hérédité : Soit $\ell < n$ pour lequel le résultat est vérifié. On a un morphisme de suites exactes. L'exactitude à droite vient de l'hypothèse de récurrence. Les noyaux se déterminent de manière évidente.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^{k+\ell}/I^{k+n}) \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+n}) \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+\ell}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^{k+\ell}/I^{k+\ell+1}) \arrow[r] & H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+\ell+1}) \arrow[r] & H^1(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^k/I^{k+\ell}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par le cas $\ell = 1$, la composée suivante est surjective,

$$H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^{k+\ell}/I^{k+\ell+n}) \to H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^{k+\ell}/I^{k+n}) \xrightarrow{p_1} H^0(M, \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes I^{k+\ell}/I^{k+\ell+1}),$$

donc p_1 l'est. Par le diagramme, p_2 aussi doit être surjective (e.g. Lemme des cinq). $\square$

Reste à voir que $(\overline{\alpha s}^{\,-1})_*\partial s$ est indépendant de s. Si $\alpha s_1 \neq \alpha s_2$, $\alpha s_1 = k(\alpha s_2)$, pour un $k \in \mathbb{C}^*$ puisque $H^0(M, \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X/I) \simeq H^0(M, \mathcal{O}_X/I) = H^0(M, \mathcal{O}_M) = \mathbb{C}$. Alors s_1 et $\tilde{s_2} := ks_2$ ont le même αs, donc le même $(\overline{\alpha s}^{\,-1})_*\partial s$, par le lemme précédent. Les deux multiplications par k se compensant, ks_2 et s_2 définissent bien la même classe.

Lemme 3.4.4. — *Soit M compacte Kähler. $L \to M$ un fibré en droites, avec $c_1(L)$ torsion, alors soit L est trivial, soit $H^0(X, L) = 0$.*

Démonstration. — Considérons les sous faisceaux du faisceau des sections lisses de L suivants.

— $\mathbb{C}(L)$ sections plates

— $\overline{\mathcal{O}}(L)$ les sections anti-holomorphes

— $PH(L)$ les sections pluriharmoniques (une fonction f est pluriharmonique si c'est $\Re h + i\Re g$ avec g, h holomorphes. C'est le cas ssi f s'écrit $u + \bar{v}$ avec u, v holomorphes.)

On a une suite exacte

$$0 \to \mathbb{C}(L) \to \mathcal{O}(L) \oplus \overline{\mathcal{O}}(L) \to PH(L) \to 0$$

où $\mathbb{C}(L) \ni c \mapsto (c, -c)$; $\mathcal{O}(L) \oplus \overline{\mathcal{O}}(L) \ni f \oplus \bar{g} \mapsto f + \bar{g}$. L'exactitude à droite vient du fait qu'une fonction holomorphe et antiholomorphe est constante.

Soit (g_{ij}) un cocycle pour le fibré plat et (h_i) des sections locales pour une section $h \in H^0(M, PH(L))$. Comme le fibré est unitaire $|h_i|$ est une fonction globale, comme h_i satisfait l'égalité de la moyenne dans toute courbe holomorphe ($h_i(a) = \int_\gamma h_i(x)d\mu$), on a une inégalité de la moyenne pour $|h_i|$ et un principe du maximum ; donc $|h_i| \equiv r$ par compacité.

Décomposons h_i comme somme $h_i = u + iv$ avec $u, v \in PH_{\mathbb{R}}$. On restreint h_i, u, v à un germe de courbe δ. Par Cauchy-Riemann $\Delta(u_{|\delta}) = \Delta(v_{|\delta}) = 0$, un calcul élémentaire donne alors

$$0 = \Delta(r) = \Delta(|h_i|) = \Delta(u|\delta^2 + v|\delta^2) = |grad(u)|^2 + |grad(v)|^2;$$

on conclut que h_i est localement constante. Donc h est plate, vu la monodromie, cette section est nulle ou le fibré est trivial. Dans le cas où le fibré n'est pas trivial la suite de cohomologie associée à la suite précédente donne

$$0 \to H^0(M, \mathbb{C}(L)) \to H^0(M, \mathcal{O}(L) \oplus \overline{\mathcal{O}}(L)) \to 0$$

Comme L a de la monodromie, $H^0(M, \mathbb{C}(L)) = 0$ et

$$0 = H^0(M, \mathcal{O}(L) \oplus \overline{\mathcal{O}}(L)) = H^0(M, \mathcal{O}(L)) \oplus H^0(M, \overline{\mathcal{O}}(L)).$$

$\square$

Proposition 3.4.5. — *La classe u_{n+1} est définie si et seulement si u_n est définie et $u_n = 0$.*

Démonstration. — trivial, après ce qu'on a déjà dit. $\square$

Donc si u_{n+1} non nul, les u_{n+k}, $k \geq 2$ ne sont pas définis.

***Définition 3.4.6* (Classe de Ueda).** — Si on a une (unique) classe u_n non nulle, on l'appelle la classe de Ueda ; $u(M \to X) = u_n$. Si il n'y en a pas, on dit que la classe de Ueda est nulle ; $u(M \to X) = 0$.

***Définition 3.4.7* (Type de Ueda).** — Le type de Ueda est ∞ si $u(M \to X) = 0$ (cas sans obstruction). Sinon, pour $u(M \to X) = u_n$, on dit que le type est n (obstruction à trivialiser à l'ordre $n + 1$). notation : $utype(M \to X)$

Références

[1] Benoît Claudon, Frank Loray, Jorge Vitorio Pereira, and Frédéric Touzet. Compact leaves of codimension one holomorphic foliations on projective manifolds. *arXiv preprint arXiv :1512.06623*, 2015.

[2] Takayuki Koike. Toward a higher codimensional ueda theory. *Mathematische Zeitschrift*, 281(3-4) :967–991, 2015.

[3] Amnon Neeman. Ueda theory : theorems and problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 81(415) :vi+123, 1989.

[4] Tetsuo Ueda. On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle. *J. Math. Kyoto Univ.*, 22(4) :583–607, 1982/83.