Géométrie en petite dimension. Feuille de T.D. n°1.

Exercice 1. — 1. Donner, dans chaque cas, l'intersection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ proposés. Dire lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
- $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x + 2y = 5\}$ et $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$.
- $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 5x + 2\}$ et $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 5y + 2\}$.
- $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$ et $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y = 4x + 2\}$.
- $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$ et $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 6y = 4x\}$.
- $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$ et $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 6y = 4x\}$ et $\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$.

2. Donner, dans chaque cas, l'intersection des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ proposés. Dire lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   - $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 2y - 4x + z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 = 2y - 4x + z\}$.
   - $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 2y - 4x + z\}$ et $\delta := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = z \text{ et } y = x\}$.
   - $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 2y - 4x + z\}$ et $\delta := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = z \text{ et } y = 2x\}$.
   - $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 3x\}$. Donner une paramétrisation de $H \cap G$.

Exercice 2. — Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants. Décrire leurs images. Calculer leurs noyaux.

1.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x + 2y \end{array}$$

2.
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x + 2y, z) \end{array}$$

3.
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y, x + y) \end{array}$$

4.
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + y - z \end{array}$$

5.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x, x) \end{array}$$

Exercice 3. — Soit
$$A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -25 & -68 \\ 26 & 61 \end{pmatrix}.$$
On considère l'application linéaire f dont la matrice dans la base canonique est donnée par A. Ecrire f en coordonnées. Donner la matrice de f dans la base (u) donnée par $u_1 = (2, -1)$ et $u_2 := (-17, 13)$.

Exercice 4. —

1. Montrer que le groupe $(\mathbb{C}, +)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère les applications
$$\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & az. \end{array}$$
Montrer que, quel que soit $a \in \mathbb{C}$, f_a est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. Montrer que $\{f_a, a \neq 0\}$ muni de la loi $\circ$ (composition des applications) est un groupe.
4. Donner les éléments f_a tels que $(f_a)^3 = Id_{\mathbb{C}}$ et écrire leur matrice dans la base $(1, i)$.

Exercice 5. —

1. Donner tous les supplémentaires de $d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Donner tous les supplémentaires de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Donner tous les supplémentaires de $\delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | z = 0 \text{ et } x + 2z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^2$, montrer que l'un des E_i est le sous-espace vectoriel nul $\{0\}$. Le résultat reste-t-il valide si on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$ dans l'énoncé ?
5. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 2y - 4x + z\}$ et $\delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = z \text{ et } y = x\}$ sont ils en somme directe ? sont-ils des sous-espaces supplémentaires ?