UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2016-2017
L1 MPCIE
Fondements Mathématiques

Feuille de TD n° 2: Fonctions réelles d'une variable réelle. Limites. Continuité.

Exercice I Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes:

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{x^2-2x-3}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{2x^2-3x+2}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x \mapsto \tan x$$

$$x \mapsto \ln(1-2x^2)\ ,\ x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}\ ,\ x \mapsto \sin\frac{1}{x}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{\cos x}\ ,\ x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{e^x-1},\ x \mapsto \frac{\cos x}{\ln|x|}.$$

Exercice 2 Soit la fonction $f(x) = |x-3| + |2x+6| - 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Simplifier les restrictions de f aux intervalles $]-\infty; -3], [-3; 3]$, et $[3; +\infty[$.
b. En déduire le sens de variation de f.
c. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction $g(x) = 2|2-x| - |3x+12| + x$.

Exercice 3 a. Encadrer sur $\mathbb{R}$ les fonctions $3sinx + 3$ et $\dfrac{2}{3-\cos x}$

b. Montrer que $\sqrt{x} - \dfrac{1}{x+1}$ est bornée sur $[0; 5]$.

Exercice 4 Fonctions composées

a. Décomposer les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ à l'aide de deux fonctions simples :
$\sqrt{2x^2+1}$ $\quad \ln(x^2+1)$ $\quad \cos^3(x) + \cos(x)$ $\quad \cos(2x + \dfrac{\pi}{2})$ $\quad e^{x^2}$
b. Déterminer les composées fog et gof avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
c. Quel est le sens de variation de la composée de deux fonctions monotones ?

Exercice 5 Soit la fonction $f(x) = x^{18} + x^{10}$.

a. Montrer que f est strictement croissante pour $x \geq 0$.
b. Soit l'équation $x^{18} + x^{10} = 544$.
1. Montrer qu'elle possède une seule racine réelle positive.
2. Déterminer un intervalle d'amplitude 1 pour cette racine.
3. Déterminer cette racine (indication : utiliser la substitution $t = x^2$).

Exercice 6 Calcul de limite: mettre en facteur le terme dominant

Calculer la limite en $+\infty$ de: $x^3 - 8x^2 + 10$ $\quad \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$ $\quad \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+3}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}$.

Exercice 7 Calcul de limite 2 : factoriser numérateur et dénominateur

Calculer la limite en $x = 1$ de: $\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ $\quad \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+4x-6}$.

Exercice 8 Calcul de limite 3 : utiliser l'expression conjuguée

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}$

Exercice 9 Calcul de limite 4 : utiliser les fonctions composées

Calculer: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x}$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Exercice 10 Calcul de limite 5 : changement de variables

En posant $t = \dfrac{1}{x}$, calculer: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x})$ $\qquad t = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x})$.

Exercice 11 Soit f la fonction donnée sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 5-x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 12 Montrer que les fonctions suivantes admettent un prolongement par continuité an 0:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \qquad g(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$$

Exercice 13 Racines d'un polynôme

Soit $P(x) = 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$

a. Calculer les images de $-1; 0; 1$ et 2 par P. En déduire le nombre de racines réelles de P.

b. Déterminer un intervalle d'amplitude $\frac{1}{2}$ pour chacune d'elles.

Exercice 14 Existence d'une solution

a. Soit la fonction $f(x) = \cos(2x) - x$. Montrer que cette fonction s'annule sur $[0; 1]$.

b. Montrer que l'equation $2x\sqrt{x^2+1} = x + 1$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

c. Soit l'equation $2\cos x = x$.

1. Montrer que les solutions de cette équation, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2; 2]$.
2. Montrer l'existence d'au moins une solution.