UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2016-2017
L1 MPCIE
Fondements Mathématiques

Feuille de TD n° 3: Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivabilité.

Exercice I 1. Montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en tout réel x_0 et que $f'(x_0) = 3x_0^2$.

2. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel $x_0 > 0$ et que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

3. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue mais non dérivable en 0.

4. Calculer l'équation de la tangente T à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x = 2$. Calculer a afin que la tangente à cette courbe au point $x = a$ soit parallèle à T.

Exercice 2 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

$$f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

$$g(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

$$h(x) = \frac{\mid x \mid \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad h(1) = 1$$

Exercice 3 Déterminer a, b de manière à ce que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si} \quad x > 1$$

soit dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 1. Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$ puis tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.

2. Déterminer les extremums de la fonction $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ (resp. $g(x) = x^5 - 5x + 1$) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \dfrac{1}{22} < 101 < 10 + \dfrac{1}{20}$.

2. Monter à l'aide du théorème des accroissements finis que:
   a. $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x.

   b. $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

   c. $\mid \sin(x) \mid \leq \mid x \mid$ pour tour réel x (plus généralement, $\mid \sin(a) - \sin(b) \mid \leq \mid a - b \mid$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$).

   d. $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6 Soit $P(x)$ un polynôme admettant exactement n racines distinctes. Montrer que $P'(x)$ admet au moins $n - 1$ racines distinctes. Donner un encadrement de ces racines en fonction de celles de P. Qu'en est-il si P est de degré n?

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 8 Appliquer le théorème des accroissements finis à

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement le résultat.