Exercice 1.

1. Soient $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=1\}$. Montrer qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}^3$ tel que $G = H + \tau := \{p + \tau | p \in H\}$.
2. *On généralise ce qu'on vient de faire.* Soit f une forme linéaire non-nulle sur $\mathbb{R}^n$. Soient $H = \{p \in \mathbb{R}^n | f(p) = 0\}$ et $G = \{p \in \mathbb{R}^n | f(p) = a\}$, montrer qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}^n$ tel que $G = H + \tau$. Discuter, en fonction de a, l'intersection de G et H.

Exercice 2. On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Soient $A = (1,2)$, $B = (4,5)$, $C = (2,1)$, $D = (0,0)$ et $E = (7,9)$.

1. Donner les coordonnées de A et B dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$, puis dans le repère $(E; \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC})$.
2. Donner les coordonnées de C et D dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, puis dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE})$.

Exercice 3. Soient H et G deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$.

1. Décrire l'intersection Δ de H et G.
2. Montrer $H + G = \mathbb{R}^3$.
3. Soit $\tau \in \mathbb{R}^3$, montrer que $H \cap (G + \tau)$ est l'image de Δ par une translation.
4. Soit $\sigma \in \mathbb{R}^3$, montrer que $(H + \sigma) \cap (G + \tau)$ est l'image de Δ par une translation.
5. Quel est le lien entre cet exercice et l'**Exercice 1** ?

Exercice 4. On se donne les deux repères cartésiens $\mathcal{R} = ((0,0); ((1,0),(0,1)))$ et $\mathcal{R}' = ((0,1); ((1,1),(-1,1)))$ de $\mathbf{R}^2$. Calculer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$ de la droite affine d'équation $2x - y + 3 = 0$ dans $\mathcal{R}$.

Exercice 5. On suppose que $\mathbf{R}^3$ est muni du repère cartésien usuel, dans lequel seront exprimés les hypothèses et solutions de cet exercice. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Donner un système d'équations cartésiennes définissant $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 6. On suppose que $\mathbf{R}^3$ est muni du repère cartésien usuel, dans lequel seront exprimés les hypothèses et solutions de cet exercice. Soit $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ qui a un point m de coordoonnées (x, y, z) associe le point $f(m)$ de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x' & = & 1 + x + 2y + z \\ y' & = & 2 + y - z \\ z' & = & -1 + x + 3z \end{array} \right.$$

1. Donner l'image par f de l'origine du repère. Donner dans la base canonique la matrice de la partie linéaire $L(f)$ de f. Calculer le noyau et son image de $L(f)$ en en précisant les dimensions.
2. Quelle est l'image par f du plan affine d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$?
3. Quelle est l'image par f du plan affine d'équation cartésienne $x + y + 2z - 1 = 0$?

Exercice 7. On suppose que $\mathbf{R}^2$ est muni du repère cartésien usuel, dans lequel seront exprimés les hypothèses et solutions de cet exercice. Soit $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ qui a un point m de coordoonnées (x, y, z) associe le point $f(m)$ de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x' & = & 3 + 3x + 2y \\ y' & = & 2 - 2x + y \end{array} \right.$$

1. Donner l'image par f de l'origine du repère. Donner dans la base canonique la matrice de la partie linéaire $L(f)$ de f. Calculer le noyau et son image de $L(f)$ en en précisant les dimensions.
2. Quelle est l'image par f de la droite affine d'équation cartésienne $5x + y + 1 = 0$?
3. Quelle est l'image par f de la droite affine d'équation cartésienne $7x + 2y - 2 = 0$?