GPD feuille de T.D. n°6.

Exercice 1. — On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel. On définit la médiatrice d'un segment de $\mathbb{R}^2$ comme l'ensemble des points à égale distance des extrémités du segment.

1. Montrer que la médiatrice d'un segment de $\mathbb{R}^2$ est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.
2. Soient A,B,C trois points distincts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les médiatrices des côtés de du triangle ABC sont concourantes.

Exercice 2. — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace affine euclidien standard.

Soit $\mathcal{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 3\}$.

1. Donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.
2. Donner une expression de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.
3. Donner une expression de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $vect((1, 0, 0))$.

Exercice 3. — Sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel standard on considère

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x, y, z), (u, v, w)) & \longmapsto & 3xu + 2yv + zw. \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{u} = (4, 4, 2)$ associée à ce produit scalaire.
3. Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Exercice 4. — *(Interprétation complexe d'isométries, décomposition en produit de réflexions)*

On travaille dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace affine euclidien standard.

1. Soit f une isométrie directe de $\mathbb{C}$. Montrer que f est déterminée par l'image de deux points distincts de $\mathbb{C}$ par f.

   Soient Δ et $\mathcal{D}$ deux droites distinctes de $\mathbb{C}$, on considère les réflexions s_Δ et $s_\mathcal{D}$ d'axes respectifs Δ et $\mathcal{D}$.
2. Décrire la composée $s_\Delta \circ s_\mathcal{D}$ quand Δ et $\mathcal{D}$ sont sécantes.
3. Décrire la composée $s_\Delta \circ s_\mathcal{D}$ quand Δ et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
4. Décomposer la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre 1 comme produit de deux réflexions.
5. Décomposer la translation de vecteur $(1, 0)$ ($t_{(1,0)} : z \mapsto z + 1$) comme produit de deux réflexions.

Exercice 5. — On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace affine euclidien standard.
Soit

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2y,x)+(2,1). \end{array}$$

Soient $A := (0,0)$, $B := (0,1)$, $C = (1,1)$ et $D = (1,0)$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Quelle est la nature du quadrilatère $g(A)g(B)g(C)g(D)$?
3. Calculer les normes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{g(A)g(B)}$.
4. Calculer la distance entre A et $g(A)$.

Exercice 6. — On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace affine euclidien standard.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$, on considère les réflexions $s_{\mathcal{P}}$ et $s_{\mathcal{H}}$ d'axes respectifs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$.

1. Décrire la composée $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{H}}$ quand $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ sont sécants.
2. Décrire la composée $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{H}}$ quand $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ sont parallèles.
3. Décomposer la translation de vecteur $(1,1,0)$ comme produit de deux réflexions.
4. Quelles peuvent être les composées de quatre réflexions de $\mathbb{R}^3$?