1. Rapport sur les travaux effectués

1.1. Présentation des thématiques de recherche. L'axe principal de mes travaux est la relation entre les connexions méromorphes plates sur les variétés projectives complexes et l'étude des feuilletages holomorphes transversalement homogènes sur ces variétés. Le thème des déformations isomonodromiques algébriques apparaît alors naturellement : c'est une technique de construction de connexions plates. Du point de vue effectif, l'étude de telles déformations se ramène à celle d'équations différentielles, telles que l'équation de Painlevé VI ou les systèmes de Garnier.

1.1.1. *Feuilletages.* Jusqu'à présent mes travaux sur les feuilletages ont porté sur les feuilletages de codimension 1. Dans ce cadre, par le théorème d'uniformisation de Riemann, les feuilletages holomorphes transversalement homogènes sontcomplètement recouverts par les feuilletages transversalement projectifs.

Définition (Loray-Pereira [LP07])**.** Soit X une variété complexe lisse. Un feuilletage transversalement projectif $\mathcal{F}$ sur X est un feuilletage de codimension 1 qui possède une structure transversalement projective. Une telle structure est la donnée d'un $\mathbb{P}^1$-fibré $\pi : P \to X$, d'un feuilletage $\mathcal{R}$ sur P, transverse à la fibre générale de π et d'une section méromorphe σ de π telle que $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$.

Ainsi, on obtient $\mathcal{F}$ comme "une tranche de $\mathcal{R}$". Cette classe de feuilletages joue un rôle majeur dans l'étude des feuilletages sur les surfaces : dans la classification de Brunella-McQuillan-Mendes, tous les feuilletages de type spécial (type non général) sont transversalement projectifs. D'autre part la sous-classe des feuilletages transversalement affines correspond aux feuilletages à intégrales premières Liouvilliennes [Sin92]. Une troisième raison de se pencher sur les feuilletages transversalement projectifs est la conjecture suivante dûe indépendamment à Cerveau et Lins-Neto. Sa plausibilité est confortée notamment dans l'article [CLNL$^+$07, Th. 1.4] et dans le récent travail [CLPT15, Sec. 9].

Conjecture. *Un feuilletage holomorphe singulier de codimension* 1 *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est soit transversalement projectif soit pull-back rationnel d'un feuilletage de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Par analogie avec le cas $\dim X = 1$, le feuilletage $\mathcal{R}$ apparraissant ci-haut est appelé feuilletage de Riccati sur P. Il peut s'interpréter comme donné par les sections horizontales d'une connexion projective plate méromorphe sur P. Une façon de se donner une telle paire $(P, \mathcal{R})$ est de *projectiviser* un fibré vectoriel $V \to X$ de rang 2 muni d'une connexion méromorphe plate ∇. En symboles : on peut prendre $(P, \mathcal{R}) = (\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(\nabla))$. Si X est projective et $P \to X$ possède une section rationnelle, $(P, \mathcal{R})$ est nécessairement de ce type, [LP07, Rem. 2.1]. L'étude des feuilletages transversalement projectifs sur la variété projective X se réduit donc à celle des fibrés de rang 2 à connexions méromorphes plates $(V \to X, \nabla)$ et des sections rationnelles de $\mathbb{P}(V)$. Ceci explique le lien étroit entre mes travaux sur les feuilletages et ceux sur les connexions plates.

1.1.2. *Connexions plates.* En lien avec les feuilletages, le sujet de ma thèse était l'étude des connexions plates logarithmiques ∇ de rang n au dessus d'une variété projective lisse X–principalement le cas $n = 2$, $X = \mathbb{P}^2$. Beaucoup de questions à leur sujet se réduisent, par la correspondance de Riemann-Hilbert, à l'étude des représentations de rang n du groupe fondamental du complémentaire de leur lieu polaire. Par contre, si l'on cherche à déterminer explicitement la matrice de connexion correspondant à une représentation donnée, on rencontre des difficultés. C'est le problème de Riemann-Hilbert, qui est déjà non trivial si $\dim X = 1$. La technique principale dans ce domaine est, si possible, de recouvrir X par une famille de courbes (C_t) la famille des connexions $(\nabla_{|C_t})$ est alors une *déformation isomonodromique* de connexion logarithmique. On emploie cette expression puisque, par platitude de ∇, deux élements voisins de $(\nabla_{|C_t})$ suffisamment géneraux ont la même monodromie. Par construction, les déformations isomonodromiques ainsi construites sont algébriques.

Pour le cas d'une famille de courbes rationnelles, après normalisation de $(\nabla_{|C_t})$, la variation de ses coefficients est régie par le *système de Schlesinger*. En rang 2, ce système se réduit à *un système de Garnier*. L'exemple de le plus simple de tel système est *l'équation de Painlevé* VI.

En rang 2, l'intérêt particulier pour les connexions logarithmiques est justifié par la relative simplicité des connexions méromorphes irrégulières [LTP14, Th. C]. Dans mes travaux plus récents, je me suis intéressé à la construction inverse : quelles connexions logarithmiques sur des courbes possèdent des déformations isomonodromiques algébriques.

1.2. **Feuilletages modulaires.** Les surfaces modulaires de Hilbert sont les compactifications projectives de quotients $(\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\Gamma$ où $\mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré et Γ est un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$. Les deux feuilletages modulaires sur une telle surface sont les quotients des feuilletages associés à la structure produit du bidisque. ce sont des feuilletages transversalement projectifs. Ensemble, les monodromies des structures transversalement projectives de ces deux feuilletages donnent la représentation tautologique du revêtement $\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to(\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\Gamma$.

L'exemple classique de telles surfaces est obtenu de la manière suivante (cf. [Hir73]). Soit $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d positif sans facteur carré et soit $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. À l'aide des deux plongements de K dans $\mathbb{R}$, on définit un plongement de $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$, dont l'image Γ_K est un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$. Dans [MP05], Mendes et Pereira décrivent certaines propriétés des feuilletages associés et donnent un modèle birationnel explicite pour la paire de feuilletages associée à $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Pour cet exemple, ils s'appuient sur une description détaillée de la surface sous-jacente donnée par Hirzebruch.

À l'aide d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI, dans [Cou14], j'ai obtenu les feuilletages modulaires sur la surface construite à partir de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Théorème 1. *Un modèle birationnel de la surface modulaire bifeuilletée* $(Y_{\sqrt{3}},\mathcal{F}_{\sqrt{3}},\mathcal{G}_{\sqrt{3}})$ *est* $(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_{\omega_1},\mathcal{G}_{\tau_1})$ *où*
$\omega_1=6\,\left(3\,v^2+1\right)v\left(v^2+9\,uv^2+3\,u\right)du$
$+\left(\left(9\,u-5\right)\left(9\,u-2\right)\left(9\,u-1\right)v^4+9\,u\left(5+54\,u^2-30\,u\right)v^2+9\,u^2\left(9\,u-2\right)\right)dv.$
$\tau_1=6\,\left(3\,v^2+1\right)v\left(-8\,v^2-3+36\,uv^2+12\,u\right)du$
$+\left(\left(9\,u-5\right)\left(9\,u+1\right)\left(9\,u-1\right)v^4+\left(3+486\,u^3-432\,u^2+45\,u\right)v^2+9\,u\left(9\,u-2\right)\left(u-1\right)\right)dv.$

De plus, $\sigma_1:(u,v)\mapsto\left(\frac{3\,v^2\left(36\,v^2+13\right)u-v^2\left(20\,v^2+9\right)}{9\,(12\,v^2-1)(3\,v^2+1)u-3\,v^2(36\,v^2+13)},v\right)$ *est une involution birationnelle de* $\mathbb{P}^2$ *qui échange* $\mathcal{F}_{\omega_1}$ *et* $\mathcal{G}_{\tau_1}$.

La preuve de ce théorème repose notamment sur la théorie des feuilletages transversalement projectifs et sur le calcul de la dimension de Kodaira numérique d'un feuilletage et la classification birationnelle des feuilletages dans les surfaces par Brunella, McQuillan et Mendes, voir [Bru03] et ses références. Le choix de la “bonne” solution de l'équation de Painlevé VI est guidé par l'étude préliminaire de l'ensemble des solutions algébriques de PVI faite dans ma thèse.

1.3. **Feuilletages transversalement affines.** J'ai travaillé avec Jorge Pereira sur des questions liées aux propriétés des feuilletages de codimension 1 transversalement affines sur les variétés projectives.

Définition. Soit X une variété projective lisse. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur X. Une structure transversalement affine pour $\mathcal{F}$ est la donnée d'un couple (ω,η) de 1-formes rationnelles sur X, tel que $\mathcal{F}$ est défini par ω et

$$\begin{cases} d\omega=\omega\wedge\eta,\\ d\eta=0.\end{cases}$$

S'il existe une telle structure, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement affine.

B. Scárdua et C. Camacho se sont intéressés assez intensément au problème suivant. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement affine sur $\mathbb{CP}^m$. *Est-il vrai qu'il est donné par une forme méromorphe fermée ou qu'il est pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe ?*

Par exemple, dans [AS99] et [CAS01] ils donnent des résultats dans ce sens avec des hypothèses sur les singularités du feuilletage. En toute généralité, il existe des contre-exemples à cette alternative, [LN02]. Ces contre-exemples indiquent que l'énoncé de l'alternative recherchée doit être un peu modifié. Nous avons réussi à montrer le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit X une variété projective lisse avec $h^1(X,\mathbb{C})=0$. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sur X. Alors au moins une des assertions suivantes est vérifiée.*

(1) Il existe un morphisme génériquement fini $p:Y\to X$ tel que $p^*\mathcal{F}$ est défini par une 1-forme rationnelle fermée.

(2) Il existe un feuilletage de Riccati transversalement affine $\mathcal{R}$ sur une surface S et une application rationnelle $p:X\dashrightarrow S$ tels que $p^*\mathcal{R}=\mathcal{F}$.

La preuve de ce théorème repose sur l'étude de la représentation de monodromie de la structure transversalement affine et les résultats récents [BCAM13, BW12] sur la structure des représentations de groupes fondamentaux de variétés quasi-projective vers le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. On utilise aussi la régularité des équations de Picard-Fuchs, ainsi que des résultats locaux sur la structure des feuilletages transversalement affines, [BT99]. Donnons un corollaire qui illustre la portée de ce théorème.

Corollaire 3. *Soit ω une 1-forme polynomiale sur $\mathbb{C}^n$. Si ω possède une integrale première Liouvillienne non-triviale et ne possède pas d'hypersurface algebrique invariante alors il existe une application polynomiale $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ et des polynômes $a, b \in \mathbb{C}[x]$ tels que*

$$\omega = P^*(dy + (a(x) + b(x)y)dx).$$

Nous avons récemment réinvesti ce travail dans la preuve du théorème suivant, en commun avec Alcides Lins Neto, [CLNP16]. C'est un pas vers la décidabilité algorithmique de l'intégrabilité Liouvillienne.

Théorème 4. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{P}^2$ de degré d, qui possède une intégrale première liouvillienne mais pas d'intégrale première rationnelle. Alors $\mathcal{F}$ possède une courbe algébrique invariante de degré inférieur ou égal à $12(d-1)$.*

1.4. **Orbites finies sous l'action du mapping class group et déformations isomonodromiques algébriques.** Dans l'article [Cou16], j'ai étudié les déformations isomonodromiques de connexions logarithmiques à $n \geq 4$ pôles sur la sphère de Riemann. Depuis Malgrange [Mal83], nous savons que toute telle déformation paramétrée par une base simplement connexe est obtenue en tirant en arrière la *déformation isomonodromique universelle*. J'ai introduit une notion d'algébrisabilité pour le germe de déformation isomonodromique universelle d'une connexion logarithmique fixée ∇. *Grosso modo*, ce germe est considéré comme algébrisable si on peut l'obtenir à partir d'une connexion plate logarithmique sur un fibré vectoriel au dessus une variété projective lisse X, par restriction à une famille convenable de courbes rationnelles dans X.

Les résultats de [Cou16] lient cette algébrisabilité à une propriété dynamique de la connexion ∇ déformée. On a ainsi établit l'énoncé suivant.

Théorème 5. *Soit ∇ une connexion logarithmique sur un fibré vectoriel holomorphe de rang m au dessus de $\mathbb{P}^1$, avec n pôles $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 4$.*

Soit $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ la représentation de monodromomie de ∇. En supposant que ρ est semi-simple ou $m = 2$, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La classe de conjugaison $[\rho]$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.*
2. *À transformation birationnelle près du fibré sous jacent à ∇, le germe de déformation isomonodromique universelle de ∇ est algébrisable.*

On a aussi obtenu ce qui suit. Pour $N = 1$, c'est un résultat d'Iwasaki [Iwa08].

Théorème 6. *Soit $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,N}$ une solution du système de Garnier de rang N, qui gouverne la déformation isomonodromique d'une connexion logarithmique ∇ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$ de trace nulle, sans pôle apparent. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Les fonctions multiformes λ_i sont des fonctions algébriques.*
2. *Les fonctions λ_i sont à branchement fini.*
3. *La classe de conjugaison $[\rho]$ de la représentation de monodromie de ∇ a une orbite finie sous $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.*

Ainsi, à partir d'orbites finies, le Théorème 5 permet de construire des connexions plates régulières au dessus de variétés projectives réglées. La construction de [Cou14] atteste, qu'en général, les connexions ainsi obtenues sont dignes d'intérêt.

Les outils principaux employés pour obtenir ces résultats sont les suivants : GAGA, une construction topologique, un raffinement du théorème d'extension de Deligne (Riemann-Hilbert) et un lemme de relèvement des représentations projectives pour les groupes fondamentaux discuté dans [Cou15].

Avec Viktoria Heu [CH16], en investissant la théorie de Teichmüller, nous avons généralisé ce résultat au cas des courbes de genre quelconque.

Théorème 7. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe complexe compacte lisse de genre $g > 0$. Soit ∇ une connexion logarithmique sur un fibré vectoriel holomorphe de rang m au dessus de $\mathcal{C}$, avec $n > 2 - 2g$ pôles $x_1, \ldots, x_n$. Supposons que (C, x) n'a pas d'automorphisme exceptionnel (condition Zariski ouverte). Soit $\rho : \pi_1(\mathcal{C} \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ la représentation de monodromomie de ∇. En supposant que ρ est semi-simple ou $m = 2$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Toute sous-représentation de $[\rho]$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathcal{C}$.

(2) À transformation birationnelle près du fibré sous jacent à ∇, le germe de déformation isomonodromique universelle de ∇ est algébrisable.

1.5. **Orbites finies pour les représentations vers** $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$**.** Avec Delphine Moussard dans [CM16], motivés par les Théorèmes 5 et 6 ci-dessus, nous avons étudié les représentations *réductibles*

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

dont l'image dans le quotient $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par les automorphismes intérieurs de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.

Cette étude se réduit aisément au problème correspondant pour les représentations vers les transformations affines de la droite complexe

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C}).$$

Nous avons une étude complète de toutes les orbites finies, pour tout n. Un aspect frappant est le suivant.

Théorème 8. *Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{P}^1$, $n + 1$ points distincts. Soit, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, α_i une boucle élémentaire autour de x_i dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, de point base x_{n+1}.*
Soit $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes telle que :

a) la classe de conjugaison $[\rho]$ ait une orbite finie sous $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$;

b) pour tout i, $\rho(\alpha_i)$ a partie linéaire non triviale.

Alors $n \leq 6$.

Vu le Théorème 5, un corollaire du Théorème 8 est le résultat de transcendence suivant.

Corollaire. *Soit $n > 6$ et ∇ une connexion logarithmique de rang deux sur $\mathbb{P}^1$, avec exactement n pôles, tous non résonants, à résidus sans valeur propre multiple. Si la monodromie de ∇ est réductible, son germe de déformation isomonodromique universelle n'est pas algébrisable.*

Dans [CH16] avec Viktoria Heu, nous avons aussi donné la classification des orbites finies de représentations de rang 2 réductibles en tout genre $g > 0$, avec un nombre de points marqués arbitraire. Les techniques employées sont assez différentes de celles de [CM16], puisqu'on ne peut pas linéariser la dynamique.

1.6. **Dérivations simples.** Avec Luis Gustavo Mendes et Ivan Pan [CMP17], nous avons étudié les feuilletages de $\mathbb{P}^2$ induits par des dérivations simples de $\mathbb{C}[x, y]$; ce sont les feuilletages qui, en dehors d'une droite, n'ont ni courbes algébriques invariantes ni singularités. Nous avons déterminé la position de ces feuilletages dans la classification birationnelle des feuilletages sur les surfaces de Brunella, McQuillan et Mendes, *cf.* [Bru03].

Théorème 9. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{CP}^2$ issu d'une dérivation simple. Si $\mathcal{F}$ n'est pas de type général, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Riccati de dimension de Kodaira kod $\mathcal{F} = 1$.*

Nous en tirons ce qui suit.

Théorème 10. *le groupe d'automorphismes birationnels de ces feuilletages est toujours fini et a fortiori le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}[x, y]$ qui commutent à une dérivation simple fixée est toujours fini.*