1. Rapport sur les travaux effectués

1.1. **Présentation des thématiques de recherche.** L'axe principal de mes travaux est la relation entre les connexions méromorphes plates sur les variétés projectives complexes et l'étude des feuilletages holomorphes transversalement homogènes sur ces variétés. Le thème des déformations isomonodromiques algébriques apparaît alors naturellement : c'est une technique de construction de connexions plates. Du point de vue effectif, l'étude de telles déformations se ramène à celle d'équations différentielles, telles que l'équation de Painlevé VI ou les systèmes de Garnier.

1.1.1. *Feuilletages.* Jusqu'à présent mes travaux sur les feuilletages ont porté sur les feuilletages de codimension 1. Dans ce cadre, par le théorème d'uniformisation de Riemann, les feuilletages holomorphes transversalement homogènes son complètement recouverts par les feuilletages transversalement projectifs.

Définition (Loray-Pereira [LP07])**.** Soit X une variété complexe lisse. Un feuilletage transversalement projectif $\mathcal{F}$ sur X est un feuilletage de codimension 1 qui possède une structure transversalement projective. Une telle structure est la donnée d'un $\mathbb{P}^1$-fibré $\pi : P \to X$, d'un feuilletage $\mathcal{R}$ sur P, transverse à la fibre générale de π et d'une section méromorphe σ de π telle que $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$.

Ainsi, on obtient $\mathcal{F}$ comme "une tranche de $\mathcal{R}$". Cette classe de feuilletages joue un rôle majeur dans l'étude des feuilletages sur les surfaces : dans la classification de Brunella-McQuillan-Mendes, tous les feuilletages de type spécial (type non général) sont transversalement projectifs. D'autre part la sous-classe des feuilletages transversalement affines correspond aux feuilletages à intégrales premières Liouvilliennes [Sin92]. Une troisième raison de se pencher sur les feuilletages transversalement projectifs est la conjecture suivante dûe indépendamment à Cerveau et Lins-Neto. Sa plausibilité est confortée notamment dans l'article [CLNL$^+$07, Th. 1.4] et dans le récent travail [CLPT15, Sec. 9].

Conjecture. *Un feuilletage holomorphe singulier de codimension* 1 *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est soit transversalement projectif soit pull-back rationnel d'un feuilletage de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Par analogie avec le cas $\dim X = 1$, le feuilletage $\mathcal{R}$ apparraissant ci-haut est appelé feuilletage de Riccati sur P. Il peut s'interpréter comme donné par les sections horizontales d'une connexion projective plate méromorphe sur P. Une façon de se donner une telle paire $(P, \mathcal{R})$ est de *projectiviser* un fibré vectoriel $V \to X$ de rang 2 muni d'une connexion méromorphe plate ∇. En symboles : on peut prendre $(P, \mathcal{R}) = (\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(\nabla))$. Si X est projective et $P \to X$ possède une section rationnelle, $(P, \mathcal{R})$ est nécessairement de ce type, [LP07, Rem. 2.1]. L'étude des feuilletages transversalement projectifs sur la variété projective X se réduit donc à celle des fibrés de rang 2 à connexions méromorphes plates $(V \to X, \nabla)$ et des sections rationnelles de $\mathbb{P}(V)$. Ceci explique le lien étroit entre mes travaux sur les feuilletages et ceux sur les connexions plates.

1.1.2. *Connexions plates.* En lien avec les feuilletages, le sujet de ma thèse était l'étude des connexions plates logarithmiques ∇ de rang n au dessus d'une variété projective lisse X–principalement le cas $n = 2$, $X = \mathbb{P}^2$. Beaucoup de questions à leur sujet se réduisent, par la correspondance de Riemann-Hilbert, à l'étude des représentations de rang n du groupe fondamental du complémentaire de leur lieu polaire. Par contre, si l'on cherche à déterminer explicitement la matrice de connexion correspondant à une représentation donnée, on rencontre des difficultés. C'est le problème de Riemann-Hilbert, qui est déjà non trivial si $\dim X = 1$. La technique principale dans ce domaine est, si possible, de recouvrir X par une famille de courbes (C_t) la famille des connexions $(\nabla_{|C_t})$ est alors une *déformation isomonodromique* de connexion logarithmique. On emploie cette expression puisque, par platitude de ∇, deux élements voisins de $(\nabla_{|C_t})$ suffisamment géneraux ont la même monodromie. Par construction, les déformations isomonodromiques ainsi construites sont algébriques.

Pour le cas d'une famille de courbes rationnelles, après normalisation de $(\nabla_{|C_t})$, la variation de ses coefficients est régie par le *système de Schlesinger*. En rang 2, ce système se réduit à *un système de Garnier*. L'exemple de le plus simple de tel système est *l'équation de Painlevé* VI.

En rang 2, l'intérêt particulier pour les connexions logarithmiques est justifié par la relative simplicité des connexions méromorphes irrégulières [LTP14, Th. C]. Dans mes travaux plus récents, je me suis intéressé à la construction inverse : quelles connexions logarithmiques sur des courbes possèdent des déformations isomonodromiques algébriques.

1.2. **Feuilletages modulaires.** Les surfaces modulaires de Hilbert sont les compactifications projectives de quotients $(\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\Gamma$ où $\mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré et Γ est un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$. Les deux feuilletages modulaires sur une telle surface sont les quotients des feuilletages associés à la structure produit du bidisque. ce sont des feuilletages transversalement projectifs. Ensemble, les monodromies des structures transversalement projectives de ces deux feuilletages donnent la représentation tautologique du revêtement $\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to(\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\Gamma$.

L'exemple classique de telles surfaces est obtenu de la manière suivante (cf. [Hir73]). Soit $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d positif sans facteur carré et soit $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. À l'aide des deux plongements de K dans $\mathbb{R}$, on définit un plongement de $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$, dont l'image Γ_K est un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$. Dans [MP05], Mendes et Pereira décrivent certaines propriétés des feuilletages associés et donnent un modèle birationnel explicite pour la paire de feuilletages associée à $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Pour cet exemple, ils s'appuient sur une description détaillée de la surface sous-jacente donnée par Hirzebruch.

À l'aide d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI, dans [Cou14], j'ai obtenu les feuilletages modulaires sur la surface construite à partir de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Théorème 1. *Un modèle birationnel de la surface modulaire bifeuilletée* $(Y_{\sqrt{3}},\mathcal{F}_{\sqrt{3}},\mathcal{G}_{\sqrt{3}})$ *est* $(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_{\omega_1},\mathcal{G}_{\tau_1})$ *où*
$\omega_1=6\left(3\,v^2+1\right)v\left(v^2+9\,uv^2+3\,u\right)du$
$+\left((9\,u-5)\,(9\,u-2)\,(9\,u-1)\,v^4+9\,u\left(5+54\,u^2-30\,u\right)v^2+9\,u^2\,(9\,u-2)\right)dv.$
$\tau_1=6\left(3\,v^2+1\right)v\left(-8\,v^2-3+36\,uv^2+12\,u\right)du$
$+\left((9\,u-5)\,(9\,u+1)\,(9\,u-1)\,v^4+\left(3+486\,u^3-432\,u^2+45\,u\right)v^2+9\,u\,(9\,u-2)\,(u-1)\right)dv.$

De plus, $\sigma_1:(u,v)\mapsto\left(\frac{3\,v^2\left(36\,v^2+13\right)u-v^2\left(20\,v^2+9\right)}{9\,(12\,v^2-1)(3\,v^2+1)u-3\,v^2(36\,v^2+13)},v\right)$ *est une involution birationnelle de* $\mathbb{P}^2$ *qui échange* $\mathcal{F}_{\omega_1}$ *et* $\mathcal{G}_{\tau_1}$.

La preuve de ce théorème repose notamment sur la théorie des feuilletages transversalement projectifs et sur le calcul de la dimension de Kodaira numérique d'un feuilletage et la classification birationnelle des feuilletages dans les surfaces par Brunella, McQuillan et Mendes, voir [Bru03] et ses références. Le choix de la “bonne” solution de l'équation de Painlevé VI est guidé par l'étude préliminaire de l'ensemble des solutions algébriques de PVI faite dans ma thèse.

1.3. **Feuilletages transversalement affines.** J'ai travaillé avec Jorge Pereira sur des questions liées aux propriétés des feuilletages de codimension 1 transversalement affines sur les variétés projectives.

Définition. Soit X une variété projective lisse. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur X. Une structure transversalement affine pour $\mathcal{F}$ est la donnée d'un couple (ω,η) de 1-formes rationnelles sur X, tel que $\mathcal{F}$ est défini par ω et

$$\begin{cases} d\omega=\omega\wedge\eta,\\ d\eta=0.\end{cases}$$

S'il existe une telle structure, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement affine.

B. Scárdua et C. Camacho se sont intéressés assez intensément au problème suivant. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement affine sur $\mathbb{CP}^m$. *Est-il vrai qu'il est donné par une forme méromorphe fermée ou qu'il est pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe ?*

Par exemple, dans [AS99] et [CAS01] ils donnent des résultats dans ce sens avec des hypothèses sur les singularités du feuilletage. En toute généralité, il existe des contre-exemples à cette alternative, [LN02]. Ces contre-exemples indiquent que l'énoncé de l'alternative recherchée doit être un peu modifié. Nous avons réussi à montrer le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit X une variété projective lisse avec $h^1(X,\mathbb{C})=0$. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sur X. Alors au moins une des assertions suivantes est vérifiée.*

(1) Il existe un morphisme génériquement fini $p:Y\to X$ tel que $p^*\mathcal{F}$ est défini par une 1-forme rationnelle fermée.

(2) Il existe un feuilletage de Riccati transversalement affine $\mathcal{R}$ sur une surface S et une application rationnelle $p:X\dashrightarrow S$ tels que $p^*\mathcal{R}=\mathcal{F}$.

La preuve de ce théorème repose sur l'étude de la représentation de monodromie de la structure transversalement affine et les résultats récents [BCAM13, BW12] sur la structure des représentations de groupes fondamentaux de variétés quasi-projective vers le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. On utilise aussi la régularité des équations de Picard-Fuchs, ainsi que des résultats locaux sur la structure des feuilletages transversalement affines, [BT99]. Donnons un corollaire qui illustre la portée de ce théorème.

Corollaire 3. *Soit ω une 1-forme polynomiale sur $\mathbb{C}^n$. Si ω possède une integrale première Liouvilienne non-triviale et ne possède pas d'hypersurface algebrique invariante alors il existe une application polynomiale $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ et des polynômes $a, b \in \mathbb{C}[x]$ tels que*

$$\omega = P^*(dy + (a(x) + b(x)y)dx).$$

Nous avons récemment réinvesti ce travail dans la preuve du théorème suivant, en commun avec Alcides Lins Neto, [CLNP16]. C'est un pas vers la décidabilité algorithmique de l'intégrabilité Liouvillienne.

Théorème 4. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{P}^2$ de degré d, qui possède une intégrale première liouvillienne mais pas d'intégrale première rationnelle. Alors $\mathcal{F}$ possède une courbe algébrique invariante de degré inférieur ou égal à $12(d-1)$.*

1.4. **Orbites finies sous l'action du mapping class group et déformations isomonodromiques algébriques.** Dans l'article [Cou16], j'ai étudié les déformations isomonodromiques de connexions logarithmiques à $n \geq 4$ pôles sur la sphère de Riemann. Depuis Malgrange [Mal83], nous savons que toute telle déformation paramétrée par une base simplement connexe est obtenue en tirant en arrière la *déformation isomonodromique universelle*. J'ai introduit une notion d'algébrisabilité pour le germe de déformation isomonodromique universelle d'une connexion logarithmique fixée ∇. *Grosso modo*, ce germe est considéré comme algébrisable si on peut l'obtenir à partir d'une connexion plate logarithmique sur un fibré vectoriel au dessus une variété projective lisse X, par restriction à une famille convenable de courbes rationnelles dans X.

Les résultats de [Cou16] lient cette algébrisabilité à une propriété dynamique de la connexion ∇ déformée. On a ainsi établit l'énoncé suivant.

Théorème 5. *Soit ∇ une connexion logarithmique sur un fibré vectoriel holomorphe de rang m au dessus de $\mathbb{P}^1$, avec n pôles $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 4$.*

Soit $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ la représentation de monodromomie de ∇. En supposant que ρ est semi-simple ou $m = 2$, les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) La classe de conjugaison $[\rho]$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.

(2) À transformation birationnelle près du fibré sous jacent à ∇, le germe de déformation isomonodromique universelle de ∇ est algébrisable.

On a aussi obtenu ce qui suit. Pour $N = 1$, c'est un résultat d'Iwasaki [Iwa08].

Théorème 6. *Soit $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,N}$ une solution du système de Garnier de rang N, qui gouverne la déformation isomonodromique d'une connexion logarithmique ∇ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$ de trace nulle, sans pôle apparent. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Les fonctions multiformes λ_i sont des fonctions algébriques.

(2) Les fonctions λ_i sont à branchement fini.

(3) La classe de conjugaison $[\rho]$ de la représentation de monodromie de ∇ a une orbite finie sous $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.

Ainsi, à partir d'orbites finies, le Théorème 5 permet de construire des connexions plates régulières au dessus de variétés projectives réglées. La construction de [Cou14] atteste, qu'en général, les connexions ainsi obtenues sont dignes d'intérêt.

Les outils principaux employés pour obtenir ces résultats sont les suivants : GAGA, une construction topologique, un raffinement du théorème d'extension de Deligne (Riemann-Hilbert) et un lemme de relèvement des représentations projectives pour les groupes fondamentaux discuté dans [Cou15].

Avec Viktoria Heu [CH16], en investissant la théorie de Teichmüller, nous avons généralisé ce résultat au cas des courbes de genre quelconque.

Théorème 7. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe complexe compacte lisse de genre $g > 0$. Soit ∇ une connexion logarithmique sur un fibré vectoriel holomorphe de rang m au dessus de $\mathcal{C}$, avec $n > 2 - 2g$ pôles $x_1, \ldots, x_n$. Supposons que (C, x) n'a pas d'automorphisme exceptionnel (condition Zariski ouverte). Soit $\rho : \pi_1(\mathcal{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ la représentation de monodromomie de ∇. En supposant que ρ est semi-simple ou $m = 2$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Toute sous-représentation de $[\rho]$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathcal{C}$.

(2) À transformation birationnelle près du fibré sous jacent à ∇, le germe de déformation isomonodromique universelle de ∇ est algébrisable.

1.5. **Orbites finies pour les représentations vers** $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$**.** Avec Delphine Moussard dans [CM16], motivés par les Théorèmes 5 et 6 ci-dessus, nous avons étudié les représentations *réductibles*

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

dont l'image dans le quotient $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par les automorphismes intérieurs de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a une orbite finie sous le mapping class group $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$.

Cette étude se réduit aisément au problème correspondant pour les représentations vers les transformations affines de la droite complexe

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C}).$$

Nous avons une étude complète de toutes les orbites finies, pour tout n. Un aspect frappant est le suivant.

Théorème 8. *Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{P}^1$, $n + 1$ points distincts. Soit, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, α_i une boucle élémentaire autour de x_i dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, de point base x_{n+1}.*
Soit $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes telle que :

a) la classe de conjugaison $[\rho]$ ait une orbite finie sous $\mathrm{MCG}_n\mathbb{P}^1$;

b) pour tout i, $\rho(\alpha_i)$ a partie linéaire non triviale.

Alors $n \leq 6$.

Vu le Théorème 5, un corollaire du Théorème 8 est le résultat de transcendence suivant.

Corollaire. *Soit $n > 6$ et ∇ une connexion logarithmique de rang deux sur $\mathbb{P}^1$, avec exactement n pôles, tous non résonants, à résidus sans valeur propre multiple. Si la monodromie de ∇ est réductible, son germe de déformation isomonodromique universelle n'est pas algébrisable.*

Dans [CH16] avec Viktoria Heu, nous avons aussi donné la classification des orbites finies de représentations de rang 2 réductibles en tout genre $g > 0$, avec un nombre de points marqués arbitraire. Les techniques employées sont assez différentes de celles de [CM16], puisqu'on ne peut pas linéariser la dynamique.

1.6. **Dérivations simples.** Avec Luis Gustavo Mendes et Ivan Pan [CMP17], nous avons étudié les feuilletages de $\mathbb{P}^2$ induits par des dérivations simples de $\mathbb{C}[x, y]$; ce sont les feuilletages qui, en dehors d'une droite, n'ont ni courbes algébriques invariantes ni singularités. Nous avons déterminé la position de ces feuilletages dans la classification birationnelle des feuilletages sur les surfaces de Brunella, McQuillan et Mendes, *cf.* [Bru03].

Théorème 9. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{CP}^2$ issu d'une dérivation simple. Si $\mathcal{F}$ n'est pas de type général, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Riccati de dimension de Kodaira kod $\mathcal{F} = 1$.*

Nous en tirons ce qui suit.

Théorème 10. *le groupe d'automorphismes birationnels de ces feuilletages est toujours fini et a fortiori le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}[x, y]$ qui commutent à une dérivation simple fixée est toujours fini.*

2. Programme de Recherche : Feuilletages algébriques transversalement homogènes

Ce document prend la suite du document "Rapport sur les travaux" et s'y réfère au besoin, puisque mon programme s'inscrit dans la continuité des travaux antérieurs.

2.1. **Dynamique sur les variétés de caractères.** Un prolongement naturel de ce qui est présenté aux sections 1.4−1.5 consiste à déterminer les orbites finies de représentations *irréductibles* pour l'action du groupe de tresses de la sphère à n brins sur $\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, ..., x_n\}), \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})\right)/\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Par la théorie des invariants [Pro76], cette action s'interprète comme une action polynomiale sur une variété algébrique affine, *la variété de caractères.* On peut espérer des succès dans cette direction pour des petites valeurs de m et n. À ce jour, le seul cas non trivial complètement élucidé est $(m, n) = (2, 4)$ –par Lisovyy-Tykhyy dans [LT14].

Pour $m = 2$, $n > 4$, Diarra [Dia13a] a determiné quelques orbites finies, celles qu'ont peut obtenir par la technique de tiré-en-arrière de [AK02] et proviennent de représentations Zariski denses dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Il serait intéressant, à commencer par le cas $n = 5$, de déterminer les autres orbites finies, puis d'identifier les solutions correspondantes du système de Garnier de rang $N = n-3$ (voir Section 2.2).

Rappelons aussi l'important théorème de structure [CS08] de Corlette et Simpson, pour les représentations de rang deux des groupes fondamentaux de variétés quasi-projective. À ma connaissance, dans le cas quasi-projectif général, on n'a pas de résultat similaire en rang supérieur. De ce point de vue, l'investigation des orbites finies qui apparaissent au Théorème 5 avec $m > 2$ paraît fournir un champ d'expérimentation intéressant pour les généralisations possibles de leur travail.

Bien sûr, vu le Théorème 7, les investigations analogues en genre supérieure sont tout aussi intéressantes.

2.2. **Méthodes effectives pour les solutions algébriques de Garnier.** J'aimerais trouver et implémenter une méthode formelle pour déterminer des solutions de systèmes de Garnier à partir de representations de rang 2 à orbite finie (cf. 1.4). Il s'agirait d'une version multivariée de ce qui a ete opéré par Boalch [Boa07] pour l'équation de Painlevé VI à l'aide de la formule asymptotique de Jimbo. Cette dernière devra aussi etre généralisée.

2.3. **Convolution intermédiaire de Katz.** On s'intéresse ici aux déformations isomonodromiques de connexions logarithmiques au dessus de $\mathbb{P}^1$, avec n pôles et rang m. Pour $m = 2, n > 4$, les seuls exemples de telles déformations de connexions à monodromie Zariski denses sont obtenus en tirant en arrière des connexions de rang 2 au dessus de courbes par des revêtements à paramètres, voir [Dia13b]. Dans le cas de Painlevé VI ($m = 2, n = 4$), les solutions qui ne peuvent être obtenues par ce procédé de tiré-en-arrière à paramètre s'obtiennent comme transformations d'Okamoto de solutions obtenues de cette façon.

L'algorithme de convolution intermédiaire de Katz [Kat96] agit sur l'ensemble des connexions plates logarithmiques sur $\mathbb{P}^1$ de lieu polaire $\{0, 1, t_1, \ldots, t_N, \infty\}$. Cette action commute à l'action du groupe de tresses, [DR00, Theorem 5.1] ; elle peut donc être restreinte aux connexions dont la monodromie donne une orbite finie pour l'action considérée à la section 1.4.

Dans [Fil06], Galina Filipuk a montré que la transformation spéciale d'Okamoto peut-être obtenue grâce à cet algorithme. C'est un cas exceptionnel que le rang de la connexion soit préservé par la transformation. En général, on a un changement de rang. Il serait intéressant d'examiner les connexions qu'on peut obtenir de cette façon à partir des solutions déjà connues des systèmes de Garnier et de voir si la propriété d'être obtenu par revêtement à paramètre est encore une fois perturbée. La description totalement explicite [DR00] de l'action de la convolution moyenne sur la monodromie permet d'espérer rapidement des succès dans cette direction.

2.4. **Riemann-Hilbert.** Dans son travail [Del70], Deligne se restreint à étendre une connexion prescrite à l'aide de certains modèles transverses logarithmiques favorables (non résonants). On peut se poser la question d'étendre en se prescrivant un modèle transverse logarithmique au choix (compatible avec la monodromie) pour chaque composante du diviseur polaire. J'ai commencé dans cette voie dans [Cou16], en considérant une classe de modèles admissibles plus larges (modèles transverses cléments). Pour les modèles logarithmiques encore laissés pour compte, je pense qu'on peut résoudre complètement le problème d'extension en introduisant les filtrations de Levelt des différents modèles et en considérant l'action de la monodromie sur ces filtrations.

2.5. **Structure transversalement projective minimale.**

Définition. Soit X une surface projective lisse. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X est dit transversalement projectif si il existe

(1) un $\mathbb{P}^1$-fibré P sur X,

(2) un feuilletage de Riccati $\mathcal{R}$ sur P et

(3) une section méromorphe σ de P génériquement transverse à $\mathcal{R}$ telle que

$$\sigma^*\mathcal{R} = \mathcal{F}.$$

Le triplet $(P, \mathcal{R}, \sigma)$ est appelé une structure transversalement projective pour $\mathcal{F}$.

Deux structures transversalement projectives pour $\mathcal{F}$ sont considérées équivalentes si l'une se déduit de l'autre par une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^1$-fibrés —au dessus de l'identité. Dans [LP07], Loray et Pereira ont défini un élément préféré dans chaque classe d'équivalence : on parle de forme minimale. Dans le cas où $\mathcal{R}$ est à pôles logarithmiques, le triplet $(P, \mathcal{R}, \sigma)$ est sous forme minimale si $\mathcal{R}$ n'a pas de pôle apparent et si l'image de σ intersecte le lieu singulier de $\mathcal{R}$ au plus au dessus d'un lieu de codimension 2 dans X.

À moins qu'il n'existe une structure transverse plus simple pour $\mathcal{F}$ (transversalement affine), on a unicité de la structure transverse à transformation birationnelle près, [CLNL$^+$07, Lemma 2.20]. Les propriétés de la forme minimale sont alors intrinsèques à $\mathcal{F}$.

Il est naturel de se questionner sur les propriétés de cette forme minimale et sur leurs relations avec celles de $\mathcal{F}$. Une première question est la suivante : "Est-ce que le fibré P est le projectivisé d'un fibré de rang 2 ?" La présence d'une section rationnelle pour P garantit une réponse positive, voir [LP07, Remark 2.1]. La question qui suit naturellement est alors celle du scindage du fibré vectoriel dont on tire P.

2.5.1. *Scindage du fibré.* Deux fibrés de rang deux qui représentent le même fibré projectif $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F)$ sont reliés par la relation $F = E \otimes L$, donc cette propriété de scindage ou non-scindage est intrinsèque à P. On peut alors définir la notion de *structure transversalement projective minimale scindée* (STPMS).

Si $X = \mathbb{P}^2$, le scindage est équivalent à l'existence d'une section holomorphe pour P, voir [OSS80, p 29]. De plus, toujours pour $X = \mathbb{P}^2$, s'il existe une section holomorphe pour P, les sections vont par paires, correspondant aux facteurs des scindages des divers fibrés de rang deux qui représentent P. Si on suppose qu'il n'y a pas de section méromorphe invariante par $\mathcal{R}$ (irréductibilité de la monodromie), cela donne un moyen d'associer deux autres feuilletages transversalement projectifs à tout feuilletage sur X qui possède une STPMS.

Il semble intéressant de comprendre les relations entre ces trois feuilletages. Il n'est même pas clair que les deux nouveaux feuilletages possèdent une STPMS. Le cas échéant, une autre question est celle de l'étude de la dynamique obtenue par itération de cette procédure.

2.5.2. *Holomorphie de la section.* Cela motive l'étude de l'holomorphie de la section dans le modèle minimal. Sur les surfaces modulaires X, j'ai prouvé cette holomorphie pour la structure transverse des feuilletages modulaires ; cela repose sur des descriptions locales explicites de la structure transverse minimale, cf. chapitre 3 de ma thèse. Dans [LP07, section 3.6], les auteurs décrivent les structures transverses minimales de $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, où le triplet $(\mathbb{P}^2, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ est un modèle birationnel de surface modulaire bifeuilletée. Pour ces deux exemples, la section qui donne la structure transverse minimale est holomorphe et donne donc lieu à une STPMS. On constate aussi que les deux membres de cette paire n'ont pas les mêmes "fibrés minimaux".

2.5.3. *Action des transformations birationnelles.* Pour les feuilletages sur les variétés projectives lisses, la propriété d'être transversalement projectif est un invariant birationnel : après trivialisation birationnelle du fibré et de la section, on peut tirer en arrière le triplet $(P, \mathcal{R}, \sigma)$ par toute application rationnelle dans la base, puisque $\mathcal{R}$ correspond alors à un triplet de 1-formes sur X. Les relations entre les propriétés des structures transverses minimales de deux surfaces feuilletées birationnellement équivalentes ne sont pas bien comprises et, me semble-t-il, méritent d'être examinées. En outre, la façon naturelle d'étudier une surface feuilletée est d'en étudier un modèle (relativement) minimal ; cela s'applique assurément au cas des feuilletages transversalement projectifs.

2.6. **Variétés modulaires de Hilbert.** Une question qui me semble intéressante est l'étude des variétés modulaires (feuilletées) de Hilbert de dimension supérieure. Elles sont construites de la même façon qu'en dimension deux en remplaçant le corps quadratique réel par un corps totalement réel K de degré d sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par $\mathbb{H}^d$.

Ainsi d donne la dimension de la variété $\mathbb{H}^d/\Gamma$ obtenue. Au moins après avoir enlevé les images des points à stabilisateur non trivial, on obtient d feuilletages transversalement projectifs de codimension 1. Je soupçonne que leurs structures transversalement projectives s'étendent raisonnablement à la variété compactifiée. On a encore une action du groupe de Galois de K sur l'espace des orbites $\mathbb{H}^d/\Gamma$, qui permute les feuilletages. J'imagine que cette action est une action par transformations birationnelles de la variété compactifiée.

Comme la désingularisation des singularités “quotient cyclique” n'est plus unique pour $d > 2$, des subtilités sur le choix d'un modèle birationnel préféré (peut-être singulier) devraient apparaître.

Un sujet intéressant est l'étude de la rationalité de ces variétés. Pour $d = 2$, Hirzebruch, Van de Ven et Zagier [HZ77] ont déterminé la liste finie des corps qui donnent des surfaces rationnelles. Pour $d > 6$, on n'obtient que des variétés de type général, voir [Tsu85]. Pour $d = 3, 4$, dans [GL02] et [GL04], Grundman et Lippincott circonscrivent fortement les corps qui pourraient donner des variétés rationnelles. Malgré cela, à ma connaissance, on n'a décidé effectivement la rationalité pour aucun des éléments de leur petite liste. Cela donne une bonne raison d'essayer d'appréhender le plus explicitement possible un tel exemple de variété feuilletée. Par exemple, l'extension galoisienne $\mathbb{Q}(\cos(\pi/7))$ figure dans la liste [GL02]. Comme pour la dimension 2, on peut espérer récupérer la 3-variété correspondante à l'aide d'une déformation isomonodromique universelle algébrisable de connexion de rang 2 à 5 pôles sur $\mathbb{P}^1$.

2.7. **Hyperbolicité et groupes fondamentaux.** Je suis aussi intéressé par les propriétés d'hyperbolicité des variétés quasi-projectives ; à commencer par les compléments de courbes planes. Il s'agit de comprendre combien on peut circonscrire les courbes entières dans ces variétés.

J'éprouve une curiosité particulière pour l'étude des relations entre ces propriétés et celles du groupe fondamental de la variété. Le résultat de Corlette-Simpson [CS08] combiné avec l'étude des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-représentations du groupe fondamental devraient permettre de montrer des résultats de dégénérescence algébrique pour des compléments de courbes de bas degré.

2.8. **Intégrabilité Liouvillienne.** Je souhaite poursuivre les travaux initiés avec Jorge Pereira et Alcides Lins Neto concernant la décidabilité de l'intégrabilité Liouvillienne pour les feuilletages du plan. Le cas des feuilletages à intégrale première rationnelle représente une difficulté notable : on ne peut pas borner le degré d'une intégrale première en fonction du degré $\deg \mathcal{F}$ du feuilletage, comme le montre l'exemple des feuilletages définis par les formes $pydx - qxdy$, $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Lins Neto [LN02] a donné des exemples montrant que connaître le type des singularités du feuilletage n'est pas une information supplémentaire suffisante pour donner une telle borne. Récemment, pour les pinceaux non isotriviaux, Pereira et Svaldi [PS16] ont montré que connaître $\deg \mathcal{F}$ et un encadrement $1 \leq g \leq b$ sur le genre des courbes intégrales permet de conclure. Cela complète les informations données dans le cas isotrivial et pour le genre 1 dans notre article [CLNP16, Th. B]. Dans le cas des intégrales premières rationnelles, une stratégie est donc de trouver une technique pour borner le genre des courbes intégrales. Par les exemples de Lins Neto, nous savons que cela est en général difficile. Une autre stratégie, que nous avons suivie avec succès pour le cas sans intégrale première rationnelle, consiste à chercher une composante d'un élement du pinceau, en donnant *a priori* une borne sur son degré. L'idée est ensuite de déduire des informations sur le facteur intégrant.

2.9. **Isotopies dans les groupes d'automorphismes.** Récemment, dans son article [Mee16], Laurent Meersseman a donné un exemple de 3-variété analytique complexe compacte X dont le groupe d'automorphismes holomorphes a plusieurs composantes connexes mais qui sont néanmoins toutes contenues dans la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes C^∞ de X. L'exemple en question est l'espace total d'une famille de surfaces de Hopf. Comprendre ce phénomène est fondamental pour l'étude du champs de Teichmüller [Mee13]. Nous souhaitons donc trouver d'autres exemples. Pour commencer, en utilisant les phénomènes de sauts pour les familles de surfaces de Hirzebruch, nous espérons décrire un exemple où la variété X serait projective.

Références

[AK02] F. V. Andreev and A. V. Kitaev, *Transformations $RS_4^2(3)$ of the ranks ≤ 4 and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation*, Comm. Math. Phys. **228** (2002), no. 1, 151–176.

[AS99] B. Azevedo Scárdua, *Integration of complex differential equations*, J. Dynam. Control Systems **5** (1999), no. 1, 1–50.

[BCAM13] E. A. Bartolo, J. I. Cogolludo-Agustin, and D. Matei, *Characteristic varieties of quasi-projective manifolds and orbifolds*, Geometry & Topology **17** (2013), no. 1, 273–309.

[Boa07] Philip Boalch, *Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem*, Differential equations and quantum groups, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 85–112.

[Bru03] Marco Brunella, *Subharmonic variation of the leafwise Poincaré metric*, Invent. Math. **152** (2003), no. 1, 119–148.

[BT99] M. Berthier and F. Touzet, *Sur l'intégration des équations différentielles holomorphes réduites en dimension deux*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **30** (1999), no. 3, 247–286.

[BW12] N. Budur and B. Wang, *Cohomology jump loci of quasi-projective varieties*, http ://arxiv.org/abs/1211.3766 (2012).

[CAS01] C. Camacho and B. Azevedo Scárdua, *Holomorphic foliations with Liouvillian first integrals*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 3, 717–756.

[CH16] Gaël Cousin and Viktoria Heu, *Algebraic isomonodromic deforations and the mapping classs group*, Arxiv (2016), 1–40.

[CLNL+07] Dominique Cerveau, Alcides Lins-Neto, Frank Loray, Jorge Vitório Pereira, and Frédéric Touzet, *Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences*, Mosc. Math. J. **7** (2007), no. 1, 21–54, 166.

[CLNP16] Gaël Cousin, Alcides Lins Neto, and Jorge Vitório Pereira, *Toward effective liouvillian integration*, Prépublication ArXiv (2016), 1–22.

[CLPT15] Benoît Claudon, Frank Loray, Jorge Vitorio Pereira, and Frederic Touzet, *Compact leaves of codimension one holomorphic foliations on projective manifolds*, arXiv preprint arXiv :1512.06623 (2015).

[CM16] Gaël Cousin and Delphine Moussard, *Finite braid group orbits on Aff(C)-character varieties of the punctured sphere*, International Math. Research notices, à paraître (2016), 1–48.

[CMP17] Gaël Cousin, Luis Gustavo Mendes, and Ivan Pan, *Birational geometry of foliations associated to simple derivations*, Prépublication Arxiv (2017), 1–30.

[Cou14] Gaël Cousin, *Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI*, Annales de l'institut Fourier **64** (2014), no. 2, 699–737.

[Cou15] Gaël Cousin, *Projective representations of fundamental groups of quasiprojective varieties : a realization and a lifting result*, Comptes Rendus Mathematique **353** (2015), no. 2, 155–159.

[Cou16] Gaël Cousin, *Algebraic isomonodromic deformations of logarithmic connections on the Riemann sphere and finite braid group orbits on character varieties*, Mathematische Annalen, à paraître (2016), 1–41.

[CS08] Kevin Corlette and Carlos Simpson, *On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups*, Compos. Math. **144** (2008), no. 5, 1271–1331.

[Del70] Pierre Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Dia13a] Karamoko Diarra, *Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **44** (2013), no. 1, 129–154.

[Dia13b] ———, *Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **44** (2013), no. 1, 129–154.

[DR00] Michael Dettweiler and Stefan Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798, Algorithmic methods in Galois theory.

[Fil06] Galina Filipuk, *On the middle convolution and birational symmetries of the sixth Painlevé equation*, Kumamoto J. Math. **19** (2006), 15–23.

[GL02] H. G. Grundman and L. E. Lippincott, *Hilbert modular threefolds of arithmetic genus one*, J. Number Theory **95** (2002), no. 1, 72–76.

[GL04] ———, *Hilbert modular fourfolds of arithmetic genus one*, High primes and misdemeanours : lectures in honour of the 60th birthday of Hugh Cowie Williams, Fields Inst. Commun., vol. 41, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 217–226.

[Hir73] Friedrich E. P. Hirzebruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseignement Math. (2) **19** (1973), 183–281.

[HZ77] F. Hirzebruch and D. Zagier, *Classification of Hilbert modular surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 43–77.

[Iwa08] Katsunori Iwasaki, *Finite branch solutions to Painlevé VI around a fixed singular point*, Adv. Math. **217** (2008), no. 5, 1889–1934.

[Kat96] Nicholas M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[LN02] Alcides Lins Neto, *Some examples for the Poincaré and Painlevé problems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), no. 2, 231–266.

[LP07] Frank Loray and Jorge Vitório Pereira, *Transversely projective foliations on surfaces : existence of minimal form and prescription of monodromy*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 6, 723–747.

[LT14] Oleg Lisovyy and Yuriy Tykhyy, *Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation*, J. Geom. Phys. **85** (2014), 124–163.

[LTP14] Frank Loray, Frédéric Touzet, and Jorge Vitorio Pereira, *Representations of quasiprojective groups, flat connections and transversely projective foliations*, à paraître au journal de l'école polytechnique (2014).

[Mal83] B. Malgrange, *Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières*, Mathematics and physics (Paris, 1979/1982), Progr. Math., vol. 37, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 401–426.

[Mee13] Laurent Meersseman, *The teichm\" uller and riemann moduli stacks*, arXiv preprint arXiv :1311.4170 (2013).

[Mee16] ———, *A note on the automorphism group of a compact complex manifold*, arXiv preprint arXiv :1611.06865 (2016).

[MP05] L. G. Mendes and J. V. Pereira, *Hilbert modular foliations on the projective plane*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), no. 2, 243–291.

[OSS80] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, vol. 3, Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[Pro76] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math. **19** (1976), no. 3, 306–381.

[PS16] Jorge Vitorio Pereira and Roberto Svaldi, *Effective algebraic integration in bounded genus*, arXiv preprint arXiv :1612.06932 (2016).

[Sin92] M. F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), no. 2, 673–688.

[Tsu85] Shigeaki Tsuyumine, *On the Kodaira dimensions of Hilbert modular varieties*, Invent. Math. **80** (1985), no. 2, 269–281.